Modul Matematika SMP Program BERMUTU

KAPITA SELEKTA
PEMBELAJARAN GEOMETRI DATAR
KELAS VIII DAN IX DI SMP

Penulis:
Al. Krismanto
Sumardyono

Penilai:
Krisdiyanto HP
Muh Isnaeni

Editor:
Jakim Wiyoto

Lay out:
Muh. Tamimuddin H.

Departemen Pendidikan Nasional
Direktorat Jenderal Peningkatan Mutu Pendidik dan
Tenaga Kependidikan
Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan
Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika
2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kita panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas bimbingan-Nya akhirnya PPPPTK Matematika dapat mewujudkan modul program BERMUTU untuk mata pelajaran matematika SD sebanyak sembilan judul dan SMP sebanyak sebelas judul. Modul ini akan dimanfaatkan oleh para guru dalam kegiatan di KKG dan MGMP. Kami mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada semua pihak yang telah membantu terwujudnya modul-modul tersebut.

Penyusunan modul melibatkan beberapa unsur yaitu PPPPTK Matematika, LPMP, LPTK, Guru SD dan Guru Matematika SMP. Proses penyusunan modul diawali dengan *workshop* yang menghasilkan kesepakatan tentang judul, penulis, penekanan isi (tema) modul, sistematika penulisan, garis besar isi atau muatan tiap bab, dan garis besar isi saran cara pemanfaatan tiap judul modul di KKG dan MGMP. *Workshop* dilanjutkan dengan rapat kerja teknis penulisan dan penilaian *draft* modul yang kemudian diakhiri rapat kerja teknis finalisasi modul dengan fokus *editing* dan *layouting* modul.

Semoga duapuluh judul modul tersebut dapat bermanfaat optimal dalam memfasilitasi kegiatan para guru SD dan SMP di KKG dan MGMP, khususnya KKG dan MGMP yang mengikuti program BERMUTU sehingga dapat meningkatkan kinerja para guru dan kualitas pengelolaan pembelajaran matematika di SD dan SMP.

Tidak ada gading yang tak retak. Saran dan kritik yang membangun terkait modul dapat disampaikan ke PPPPTK Matematika dengan alamat email *p4tkmatematika@yahoo.com* atau alamat surat: PPPPTK Matematika, Jalan Kaliurang Km 6 Condongcatur, Depok, Sleman, D.I. Yogyakarta atau Kotak Pos 31 Yk-Bs 55281 atau telepon (0274) 881717, 885725 atau nomor faksimili: (0274) 885752.

Sleman, Oktober 2009
a.n. Kepala PPPPTK Matematika
Kepala Bidang Program dan Informasi

Winarno, M.Sc.
NIP 195404081978101001

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Geometri bangun datar merupakan salah satu pokok bahasan geometri dalam pelajaran matematika yang harus dibelajarkan kepada siswa pada satuan pendidikan SMP/MTs sesuai dengan Standar Isi Permendiknas No. 22 Tahun 2006. Materi mengenai bangun datar telah mulai dipelajari di jenjang SD/MI. Pada jenjang SMP/MTs materi mengenai geometri bangun datar antara lain berkenaan dengan Teorema Pythagoras, kesebangunan dan kekongruenan bangun-bangun datar sederhana, serta mengenai lingkaran.

Walaupun materi geometri bangun datar di SMP/MTs termasuk materi dasar, namun penerapannya dalam pembelajaran sering menimbulkan banyak masalah dan kesulitan baik bagi siswa maupun bagi guru. Hal ini terbaca dari beberapa hasil penelitian, *need assessment* PPPPTK Matematika, maupun pengalaman penulis saat diklat dan diskusi dengan para guru.

Dalam modul ini, penulis berupaya memilih dan memilah tema-tema yang penting untuk diketahui terkait dengan masalah yang sering dijumpai. Solusi berupa pembahasan atau uraian materi yang diberikan dalam modul ini berdasarkan masalah-masalah tersebut. Proses pembelajaran dengan menggunakan model ini dapat dilakukan di MGMP Matematika SMP/MTs baik dengan cara model fasilitasi maupun sebagai bahan diskusi kelompok.

B. Tujuan

Modul ini ditulis dengan maksud untuk meningkatkan kompetensi guru dalam mengelola pembelajaran matematika khususnya materi geometri bidang datar.
Setelah mempelajari modul ini diharapkan pembaca dapat:

1. memfasilitasi guru dalam pertemuan MGMP terkait materi geometri bangun datar,
2. terbuka wawasannya dalam menyelesaikan kesulitan-kesulitan yang dihadapi guru berkaitan dengan materi geometri bidang datar,
3. mengembangkan kreativitas dalam membuat soal-soal yang berkaitan dengan permasalahan-permasalahan yang sering dihadapi guru terkait dengan geometri bidang datar.

C. Ruang Lingkup

Ruang lingkup dalam modul ini meliputi topik-topik geometri datar pada kelas VIII dan IX di SMP, yang terdiri dari:

1. permasalahan terkait Teorema Pythagoras,
2. permasalahan terkait kesebangunan dan kekongruenan,
3. permasalahan terkait lingkaran.

D. Saran Cara Pemanfaatan Modul di MGMP

Modul ini disusun berdasarkan masalah yang mungkin dihadapi oleh para guru. Oleh karena itu, dalam memanfaatkan modul ini sebaiknya Anda menjawab lebih dulu masalah-masalah yang dikemukakan pada bagian pendahuluan setiap bab atau Kegiatan Belajar (KB). Pengalaman Anda saat menjawab masalah-masalah pendahuluan tersebut diharapkan ikut memotivasi Anda untuk mempelajari modul dan diharapkan Anda juga menyadari pentingnya tema yang akan dibahas.

Selanjutnya Anda membaca dan memahami uraian atau pembahasan materi dalam Kegiatan Belajar (KB). Uraian dalam KB merupakan salah satu pendekatan dalam menjawab masalah yang dihadapi. Pendekatan ini berkaitan dengan cara pembahasan. Teori-teori matematika yang disampaikan telah diusahakan sesuai dengan kaidah yang benar dalam matematika. Pelajari dan pahami materi KB yang disampaikan, bila perlu Anda dapat membaca berulang-ulang agar lebih memahami.

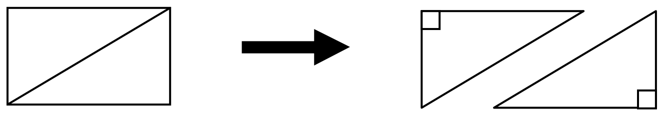
Setelah Anda mengikuti KB yang bersangkutan, Anda diharapkan menjawab latihan yang berupa soal-soal yang bersesuaian dengan KB yang telah diikuti. Soal-soal tersebut hendaknya dijawab sendiri oleh Anda agar dapat diketahui seberapa jauh pemahaman Anda setelah mengikuti KB terhadap tema yang berkaitan dengan masalah pada KB. Untuk dapat mengetahui hal ini, silakan Anda perbandingkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang disiapkan dalam modul ini. Sebagai suatu saran agar Anda jangan melihat kunci sebelum berusaha menjawab latihan terlebih dahulu. Seandainya Anda melihat kunci sebelum menjawab latihan maka dapat diindikasikan bahwa Anda belum memahami sepenuhnya KB yang berkaitan.

Untuk dapat memanfaatkan modul secara maksimal maka dibutuhkan minimal 20 pelajaran (@ 50 menit). Jika para pemakai modul ini mengalami kesulitan, membutuhkan klarifikasi, maupun memiliki saran yang membangun, sudi kiranya menyampaikan kepada kami melalui lembaga PPPPTK Matematika melalui email: *p4tkmatematika@yahoo.com* atau alamat PPPPTK Matematika Jl. Kaliurang Km. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 Yk-Bs Yogyakarta 55281. Korespondensi langsung dengan penulis melalui email: *kristemulawak@yahoo.co.id* atau *smrdyn2007@gmail.com* .

BAB II
TEOREMA PYTHAGORAS

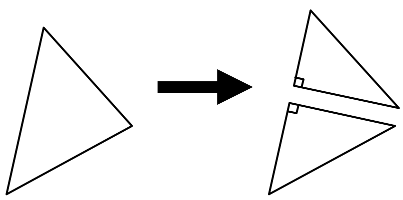
A. Pengantar

Bangun datar yang akrab di sekitar kita selain persegipanjang adalah segitiga. Jika persegipanjang memiliki bentuk yang khusus berupa persegi, maka segitiga memiliki bentuk yang khusus pula, salah satunya berupa segitiga siku-siku. Persegipanjang dapat dipandang dibentuk oleh dua buah segitiga siku-siku.



Gambar 2.1

Bahkan setiap segitiga juga dapat dipandang dibentuk oleh dua buah segitiga siku-siku.



Gambar 2.2

Oleh karena itu, mengetahui dan memahami sifat-sifat segitiga siku-siku merupakan kompetensi dasar dalam pelajaran geometri. Salah satu sifat dasar segitiga siku-siku dikenal dengan nama Teorema Pythagoras. Secara induktif dan sederhana, Teorema Pythagoras sudah dikenalkan di Sekolah Dasar. Di SMP, teorema itu dibahas lebih lanjut.

Pada bab ini Anda akan mempelajari tentang kompetensi yang terkait Teorema Pythagoras, dan termasuk masalah pokok yang dijumpai dalam pembelajaran Teorema Pythagoras di SMP. Tema-tema yang diangkat didasarkan pada dan berkaitan dengan Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar dalam Standar Isi SMP/MTs.

B. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, Bapak/Ibu diharapkan memiliki pemahaman mengenai Teorema Pythagoras dan kebalikannya, serta keterampilan menentukan akar kuadrat dan penggunaan Teorema Pythagoras dalam pemecahan masalah.

C. Materi Pembelajaran

Untuk mencapai tujuan di atas, materi dalam buku ini disajikan dalam beberapa kegiatan belajar (KB) sebagai berikut:

1. KB 1: Masalah tentang Rumus Pythagoras dan Teorema Pythagoras,
2. KB 2: Masalah tentang Tripel Pythagoras,
3. KB 3: Masalah tentang Bukti Teorema Pythagoras, dan
4. KB 4: Masalah tentang Kebalikan Teorema Pythagoras.

Pada setiap KB, diawali dengan satu atau beberapa soal atau masalah yang sebaiknya Anda kerjakan lebih dulu. Hal ini sebagai bahan refleksi apakah masalah yang akan disajikan benar-benar Anda butuhkan atau bermanfaat bagi Anda.

Setelah KB dilanjutkan dengan latihan berupa beberapa soal yang terkait dengan materi pada KB tersebut. Kerjakanlah latihan itu sebagai bahan pembanding, apakah Anda telah memahami materi dalam KB yang bersangkutan.

1. KEGIATAN BELAJAR 1: Masalah tentang Rumus Pythagoras dan Teorema Pythagoras

Masalah 1

Menurut Anda apa yang dimaksud dengan "Rumus Pythagoras"?

Masalah 2

Apa pula yang dimaksud "Teorema Pythagoras"?

Masalah 3

Apakah terdapat perbedaan antara Rumus Pythagoras dan Teorema Pythagoras? Jika ya, di mana? Jika tidak, mengapa?

Pembahasan

Salah satu Standar Kompetensi dalam Standar Isi Permendiknas no. 22 adalah "Menggunakan Teorema Pythagoras dalam pemecahan masalah" yang terdapat pada Standar Isi untuk pelajaran Matematika di SMP. Namun demikian, kita sering mendengar atau malah sering salah kaprah ketika menyebut "Teorema Pythagoras" sebagai "Rumus Pythagoras". Sebenarnya apa perbedaan antara kedua istilah ini?

Teorema merupakan sebuah pernyataan (umumnya dalam bentuk implikasi, "jika...maka...") yang (selalu) bernilai benar. Dalam bahasa Indonesia, istilah "teorema" sering ditulis dengan nama "dalil". Karena itu, pada beberapa literatur "Teorema Pythagoras" kadang disebut dengan nama "Dalil Pythagoras".

Dalam matematika sesungguhnya banyak pernyataan yang selalu bernilai benar namun **tidak semua** pernyataan yang selalu bernilai benar dikenal dengan sebutan "teorema", karena istilah "teorema" biasanya untuk pernyataan yang selalu bernilai benar yang memang benar-benar dipandang penting. Contoh sederhana mengenai pernyataan yang selalu bernilai benar misalnya: "Jumlah dua bilangan genap merupakan bilangan genap". Pernyataan ini selalu bernilai benar dan dapat dibuktikan sebagai berikut:

Jika a genap maka (menurut pengertian genap) a dapat dibagi 2. Dengan kata lain a dapat dinyatakan sebagai penggandaan (dua kali) sebuah bilangan bulat lainnya.

Misalkan, $a = 2k$ dengan k suatu bilangan bulat.

Ambil sebarang dua buah bilangan genap a dan b maka dapat dinyatakan $a = 2k_1$ dan $b = 2k_2$ dengan k_1 dan k_2 masing-masing merupakan bilangan bulat.

$a + b = 2k_1 + 2k_2$ (sesuai definisi a dan b bilangan genap)

$= 2(k_1 + k_2)$ (sesuai sifat distributif)

$= 2k$ k suatu bilangan bulat karena jelas atau mudah dipahami bahwa jumlah dua bilangan bulat juga merupakan bilangan bulat (bukan pecahan).

Nah, ternyata jumlah a dan b dapat dinyatakan sebagai penggandaan (dua kali) suatu bilangan bulat. Jadi, Jumlah a dan b adalah bilangan genap. Karena a dan b sebarang, maka pernyataan di atas terbukti benar.

Walaupun pernyataan di atas selalu bernilai benar tetapi kita tidak mengenalnya sebagai "teorema" karena dianggap mudah (sehingga tidak terlalu penting untuk diberi nama teorema).

Berbeda dengan Teorema Pythagoras. Pernyataan yang disebut Teorema Pythagoras penting dalam matematika, baik karena sifatnya yang menarik (atau menakjubkan) maupun karena dapat merupakan pijakan untuk mengembangkan teorema-teorema lain yang lebih penting maupun mengembangkan cabang matematika yang baru.

Bagaimana sebenarnya bunyi Teorema Pythagoras? Sesungguhnya, tidak ada bunyi yang harus dihafal tentang teorema ini, karena dalam setiap literatur bunyi atau redaksi pernyataannya dapat berbeda-beda. Walaupun demikian, konsep yang dinyatakan sama.

Berikut beberapa alternatif untuk menyatakan Teorema Pyhagoras:

"Pada sebarang segitiga siku-siku, kuadrat panjang sisi miring (hipotenusa) sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi-sisi yang lain".

Versi lain Teorema Pythagoras:

"Jika segitiga *ABC* dengan *C* sudut siku-siku dan *a, b, c* berturut-turut panjang sisi di depan sudut *A*, *B*, dan *C* maka berlaku $a^2 + b^2 = c^2$ ".

Kesemua versi di atas termasuk versi aljabar dari Teorema Pythagoras. Kita juga dapat menyatakan Teorema Pythagoras secara geometris, seperti di bawah ini.

"Jika segitiga *ABC* siku-siku di *C* maka luas persegi yang panjang sisinya *c* sama dengan jumlah luas persegi yang panjang sisi-sisinya *a* dan *b*".

Kadang cukup ditulis sebagai berikut:

"Jika segitiga *ABC* siku-siku maka luas persegi pada sisi miring sama dengan jumlah luas persegi pada sisi-sisi yang lain".

Tentu Anda dapat pula menyatakan Teorema Pythagoras dengan lambang segitiga *PQR* atau yang lainnya. Hanya perlu diketahui konvensi atau kebiasaan di dalam matematika menggunakan lambang segitiga *ABC* dengan sudut *C* siku-siku.

Lalu, apa yang disebut "Rumus Pythagoras"? Yang perlu dipahami adalah pengertian "rumus" atau "formula". Umumnya yang disebut rumus dalam matematika adalah suatu pernyataan aljabar (menggunakan lambang) baik berupa kesamaan maupun ketidaksamaan. Dengan demikian, apa yang disebut **Rumus Pythagoras** adalah kesamaan: $a^2 + b^2 = c^2$.

Jadi jelas bahwa Teorema Pythagoras adalah suatu pernyataan yang selalu bernilai benar tentang panjang sisi-sisi segitiga siku-siku, sementara Rumus Pythagoras berupa pernyataan aljabar yang menyatakan hubungan ketiga panjang sisi segitiga siku-siku. Rumus Pythagoras bukan Teorema Pythagoras, tetapi Teorema Pythagoras memuat Rumus Pythagoras baik secara implisit maupun eksplisit.

Setelah Anda mengikuti proses belajar dan pembahasan di atas, seharusnya Anda mulai atau lebih memahami mengenai perbedaan Rumus Pythagoras dan Teorema Pythagoras, dan kapan menggunakannya.

Latihan 1

1. Nyatakan Teorema Pythagoras dengan bahasa Anda sendiri minimal dalam dua versi!
2. Dari beberapa versi Teorema Pythagoras yang telah dibahas sebelumnya, mana pilihan terbaik agar siswa tidak salah pengertian (miskonsepsi) mengenai konsep Teorema Pythagoras?

2. KEGIATAN BELAJAR 2: Masalah tentang Tripel Pythagoras

Masalah 1

Buatlah sebuah Tripel **Pythagoras** untuk panjang sisi miring di atas 50 satuan!

Masalah 2

Buatlah sebuah Tripel Pythagoras yang memuat panjang sisi 17 satuan!

Pembahasan

Banyak bilangan real a, b, dan c yang memenuhi Rumus Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Hal menarik yang dapat dieksplorasi adalah berapa saja rangkaian tiga bilangan bulat (positif) yang memenuhi Rumus Pythagoras? Bila kita mencoba dengan dua bilangan bulat positif (bilangan asli) yang sama maka dapat dipastikan bilangan ketiga **bukan** bilangan asli. Lalu, rangkaian tiga bilangan asli yang mana saja yang memenuhi Rumus Pythagoras? Ketiga rangkaian tiga bilangan asli ini disebut **Tripel Pythagoras**.

Sudah sejak lama orang mengenal Tripel Pythagoras, bahkan diduga kuat orang Mesir Kuno dan Babilonia kuno telah akrab dengan salah satu tripel yaitu (3,4,5). Di sini kita menulis tripel dengan tanda kurung dan bilangan disusun ke kanan semakin besar.

Terdapat beberapa Tripel Pythagoras yang sudah biasa dikenal seperti (3,4,5), (6,8,10), (5,12,13), (7,24,25), dan (8,15,17). Secara umum terdapat dua jenis Tripel Pythagoras. Pertama, Tripel Pythagoras Primitif atau Tripel Pythagoras Dasar yaitu Tripel Pythagoras yang semua bilangannya memiliki FPB (faktor persekutuan terbesar) sama dengan 1. Ini artinya Tripel Pythagoras Primitif tidak dapat disederhanakan lagi menjadi bilangan-bilangan bulat yang lebih kecil dengan perbandingan yang sama. Jenis kedua adalah Tripel Pythagoras yang bukan termasuk Tripel Pythagoras Primitif yang disebut Tripel Pythagoras Non-Primitif. Tripel Pythagoras Non-Primitif dapat diperoleh antara lain dengan mengalikan setiap unsur pada Tripel Pythagoras Primitif dengan bilangan asli ≥ 2.

Contoh Tripel Pythagoras Primitif adalah (3,4,5) dan (5,12,13)
Contoh Tripel Pythagoras Non-Primitif adalah (6,8,10), (9,12,15), (12,16,20), (15,20,25), (10,24,26), (15,36,39), (20,48,52), dan (25,60,65)
Tripel Pythagoras (6,8,10) = $(2 \times 3, 2 \times 4, 2 \times 5)$ cukup kita tulis $2 \times (3,4,5)$

Adakah Tripel Pythagoras lainnya? Bagaimana bila kita menginginkan suatu Triple Pythagoras yang memuat bilangan tertentu?

Untuk menjawab masalah di atas, kita memerlukan suatu rumus atau aturan menemukan sebuah Tripel Pythagoras. Selain manfaat yang disebutkan di atas, keberadaan suatu aturan atau rumus tersebut membantu kita sebagai guru dalam menyusun soal pemecahan masalah atau soal latihan tentang Teorema Pythagoras. Keterangan di atas diperlukan agar materi pembelajaran tidak melulu menampilkan bilangan yang itu-itu saja.

Berikut ini, sebuah rumus yang cukup sederhana.

$2m, m^2 - 1, m^2 + 1$ dengan m sebarang bilangan asli lebih dari 1.

Dapat ditunjukkan bahwa rumus di atas memenuhi Tripel Pythagoras sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 &= 4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1 \\ &= m^4 + 2m^2 + 1 \\ &= (m^2 + 1)^2\end{aligned}$$

Sekarang misalkan kita ingin mendapatkan sebuah Tripel Pythagoras dengan salah satu bilangan 24.

Kita telah mengetahui sebuah Tripel Pythagoras (7, 24, 25). Tripel yang lain sebagai berikut:

Misal $2m = 24$ sehingga $m = 12$ maka $m^2 - 1 = 143$ dan $m^2 + 1 = 145$. Berdasarkan rumus di atas, diperoleh Tripel Pythagoras (24, 143, 145).

Misal $m^2 - 1 = 24$ sehingga $m = 5$ maka $2m = 10$ dan $m^2 + 1 = 26$. Berdasarkan rumus sebelumnya disimpulkan sebuah Tripel Pythagoras (10,24,26). Terlihat bahwa $(10,24,26) = 2 \times (5,12,13)$.

Dengan rumus di atas, tentu Anda dapat menyelesaikan Masalah 1. Ambil sebarang Tripel Pythagoras yang telah dikenal, lalu kalikan dengan bilangan asli yang sesuai untuk mendapatkan panjang sisi miring di atas 50.

Untuk Masalah 2, salah satu cara dengan memisalkan $m^2 + 1 = 17$ sehingga diperoleh $m = 4$.

Latihan 2

1. Carilah minimal 2 Tripel Pythagoras yang berbeda dengan salah satu bilangannya 70.

2. Diberikan $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ dengan $m > n$. Apakah a dan b dapat membentuk sebuah Tripel Pythagoras? Jika ya, apa rumus untuk bilangan ketiga dan sisi yang mana yang ditunjukkan oleh bilangan yang ketiga ini?

3. KEGIATAN BELAJAR 3: Masalah tentang Bukti Teorema Pythagoras

Masalah 1

Apakah Anda dapat membuktikan Teorema Pythagoras? Jika dapat, bagaimana Anda membuktikannya?

Masalah 2

Apakah Anda pernah membuktikan Teorema Pythagoras dalam pembelajaran di SMP? Jika tidak, apakah Anda pernah menunjukkan kebenaran Teorema

Pythagoras dalam pembelajaran di SMP, misalnya dengan menyuguhkan beberapa contoh atau mempraktekkan?

Pembahasan

Teorema Pythagoras adalah sebuah pernyataan yang selalu bernilai benar. Akan tetapi bagi siswa kebenaran pernyataan tersebut tidak serta merta jelas dan mudah dimengerti. Bahkan bagi banyak orang dewasa pun, kebenaran pernyataan Teorema Pythagoras perlu pembuktian.

Sudah menjadi suatu keharusan dalam matematika, bila sebuah pernyataan hendak dikatakan sebagai ”teorema” maka pernyataan itu harus dibuktikan terlebih dahulu kebenarannya. Bagaimana implikasinya dalam pembelajaran di sekolah? Pembelajaran matematika memiliki tujuan agar siswa berpikir logis, kritis, kreatif, cermat, dan tepat. Keterampilan berpikir seperti ini akan dapat dicapai bila siswa selalu diajak untuk menelaah, mengeksplorasi, dan berlatih menarik kesimpulan. Selain itu siswa diajak pula untuk tidak selalu menerima informasi matematika tanpa *reserve*, tanpa pembuktian, tidak pula menerima kebenaran suatu informasi matematika atas dasar otoritas (misalnya, segala informasi dari guru selalu benar). Oleh karena itu, pembelajaran suatu “teorema” dalam matematika semestinya pula disertai pembelajaran pembuktiannya.

Persoalan akan muncul bilamana pernyataan suatu teorema mudah untuk dipahami tetapi bukti dari pernyataan itu sendiri sulit untuk diikuti. Masalah yang seperti ini banyak terjadi dalam matematika. Tetapi untungnya, pada kasus Teorema Pythagoras; maksud pernyataannya mudah dipahami dan buktinya pun ternyata juga mudah pula dipahami.

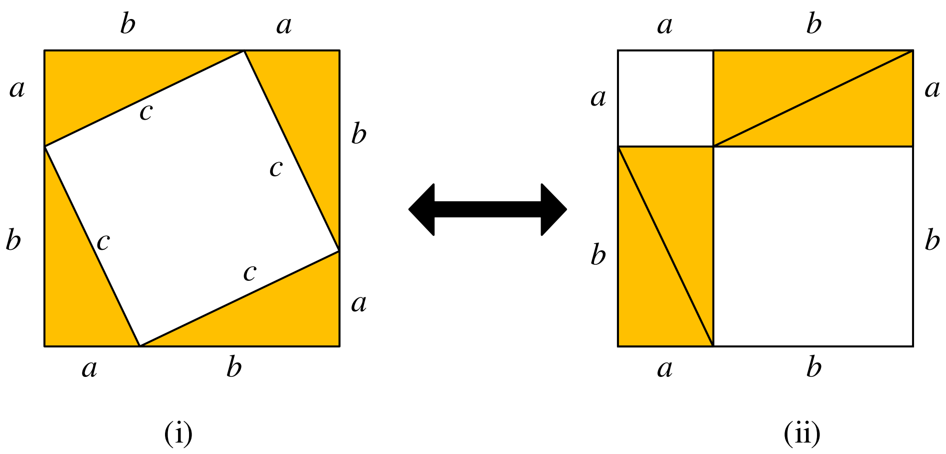
Sejak zaman Pythagoras, bukti untuk Teorema Pythagoras telah dikenal. Oleh karena bukti matematis pertama mengenai teorema itu dijumpai pertama kali pada literatur dari Pythagoras maka teorema tersebut lalu dikenal sebagai Teorema Pythagoras. Walaupun demikian, teorema itu telah lama dikenal jauh sebelum zaman Pythagoras, lebih awal pada zaman Babilonia dan Mesir Kuno.

Ada banyak bukti untuk Teorema Pythagoras, bahkan sebuah buku klasik pernah memuat lebih dari 350 macam bukti. Dari ratusan bukti yang telah diperoleh orang, banyak pula yang sesuai untuk dipergunakan dalam pembelajaran di SMP. Berikut ini beberapa bukti yang cukup relevan. Beberapa bukti Teorema Pythagoras berikut diklasifikasikan ke dalam beberapa jenis.

a. Bukti diagram (*proof without words*)

Bukti dari Pythagoras berupa bukti dengan diagram dan termasuk salah satu bukti yang mudah untuk dipahami. Bukti dengan diagram kadang dapat dipahami tanpa menyertakan tulisan apapun sehingga sering disebut "bukti tanpa kata-kata" (*proof without words*).

Bukti dapat dipahami dengan hanya melihat dan mencermati diagram. Berikut bukti dari Pythagoras (atau Perguruan Pythagoras).



Gambar 2.3

Keempat segitiga siku-siku pada persegi Gambar 2.3 (i) dan (ii) mempunyai ukuran panjang sisi maupun sudutnya berpasang-pasangan sama (segitiga-segitiga itu dinamakan kongruen) Dengan demikian, luas daerah yang tidak ditutupi oleh keempat segitiga siku-siku itu (yang tidak diarsir) haruslah sama. Pada persegi Gambar 2.3 (i) yang tidak terarsir luasnya c^2 dan kedua persegi pada Gambar 2.3 (ii) jumlah luasnya $a^2 + b^2$. Jadi, $a^2 + b^2 = c^2$.

b. Bukti dengan menggunakan rumus luas

Bukti I:

Dengan menggunakan diagram persegi pada Gambar 2.3 (i) pada diagram bukti sebelumnya, kita pun dapat menurunkan Teorema Pythagoras, sebagai berikut:

Pandang diagram persegi Gambar 2.3 (i):

Luas persegi:

Karena panjang sisinya $a + b$ maka $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + \mathrm{b}^2$ …. (1)

Luas persegi: Karena terdiri dari persegi dengan panjang sisi c dan 4 segitiga siku-siku maka

$$c^2 + 4.(\frac{ab}{2}) = c^2 + 2ab \qquad \text{…. (2)}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $a^2 + 2ab + \mathrm{b}^2 = c^2 + 2ab$ yang dapat disederhanakan lagi menjadi: $a^2 + \mathrm{b}^2 = c^2$ (terbukti).

Bukti II: Dari Bhaskara (matematikawan India, sekitar abad X).

Perhatikan Gambar 2.4. Bangun $ABCD$ di bawah berupa persegi dengan panjang sisi c. Di dalamnya dibuat empat buah segitiga siku-siku dengan panjang sisi a dan b. (Dapat pula dipikirkan terdapat empat segitiga siku-siku kongruen yang disusun membentuk persegi $ABCD$).

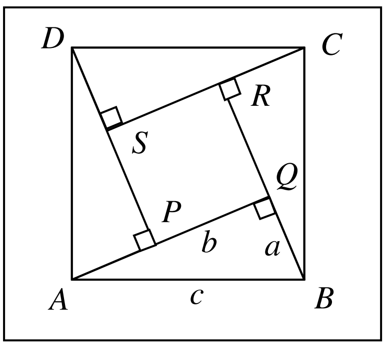
Dengan konstruksi bangun tersebut maka:

Luas $PQRS$ + $4 \times$ luas ABQ = luas $ABCD$

$$\Leftrightarrow (b-a)^2 + 4 \times \frac{1}{2} . ab = c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 2ab + \mathrm{a}^2 + 2ab = c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2. \quad \text{(terbukti)}$$



Gambar 2.4

Bukti III: Dari J.A. Garfield tahun 1876.

Perhatikan Gambar 2.5. Luas daerah trapesium dapat dihitung dengan dua cara sehingga kita dapat membuktikan Teorema Pythagoras seperti di bawah ini.

Luas trapesium = $\frac{1}{2}$(panjang sisi alas + atas) $\times$ tinggi

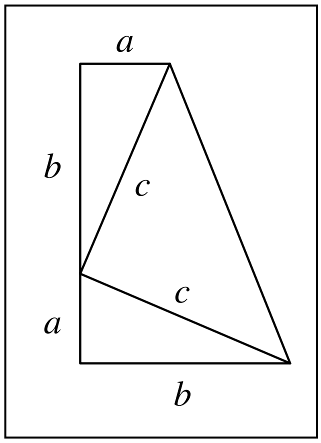
$$= \frac{1}{2}\ (a + b) \times\ (a + b).$$

Di lain pihak, luas trapesium $= 2.\ \frac{1}{2}\ ab + \frac{1}{2}\ c^2$

Jadi $\frac{1}{2}(a + b).\ (a + b) = 2.\ \frac{1}{2}\ ab + \frac{1}{2}\ c^2$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2. \quad \text{(terbukti)}$$



Gambar 2.5

c. **Bukti dengan pemotongan (*dissection method*) (termasuk *proof without words*)**

Berikut ini beberapa bukti jenis *proof without words* yang penulis konstruksi berdasarkan diagram dari Fibonacci (bukti I) dan diagram dari Tsabit Ibnu Qurra (bukti II).

Bukti I:

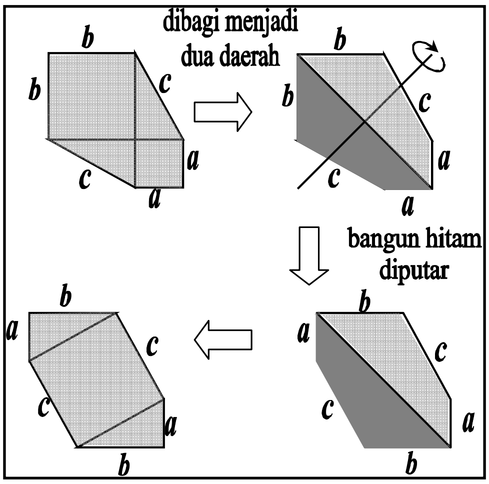
Perhatikan proses dari diagram di samping.

luas daerah gambar awal

$$= a^2 + b^2 + 2.\frac{1}{2}.ab$$

luas daerah gambar akhir

$$= c^2 + 2.\frac{1}{2}.ab$$



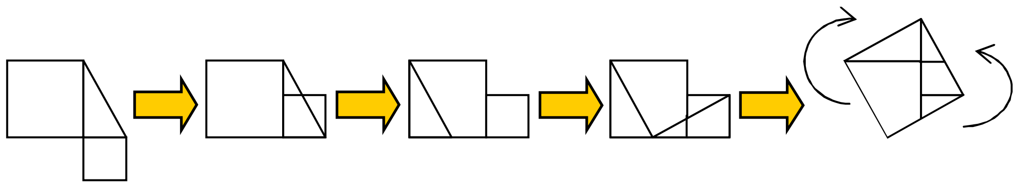
Gambar 2.6

Oleh karena transformasi di atas tidak mengubah ukuran, maka kedua daerah tersebut sama luasnya, sehingga dengan mengurangi masing-masing oleh ab atau mengambil kedua bangun segitiga siku-siku akan diperoleh:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Bukti II:

Perhatikan bukti geometris berikut ini, dengan cara menggeser, memotong, dan memutar.



Gambar 2.7

Demikian beberapa bukti yang menurut hemat penulis cukup mudah untuk dipahami dan meliputi beberapa strategi pembuktian (jenis pembuktian).

Masih banyak bukti lain yang cukup terkenal seperti bukti dari Fibonacci (atau Leonardo de Pisa), bukti dari Euclid, bukti dari Dudeney, bukti dari Liu Hui, bukti dari Tsabit Ibnu Qurra, bukti dari Pappus. Kesemua nama bukti yang baru disebut dapat ditelusur pada buku-buku tentang sejarah matematika atau buku rekreasi matematika.

Beberapa bukti yang telah dibahas di atas dapat dipergunakan di SMP. Beberapa di antaranya dapat pula didemonstrasikan menjadi sebuah alat peraga. Ini tentu lebih menarik bagi siswa. Selain itu, walaupun jenis bukti "*proof without words*" masih menjadi polemik di kalangan matematikawan (karena tidak memuat kata-kata dan lambang aljabar), tetapi bukti jenis ini cocok untuk mengasah intuisi dan penalaran siswa. Dengan diagram "*proof without words*" tersebut siswa dapat ditantang dengan beberapa pertanyaan "mengapa", dan "bagaimana", atau diminta untuk memperjelas makna diagram agar dapat dipahami oleh siswa lain yang belum "melihat" bukti tersebut.

Latihan 3

1. Berilah penjelasan tahap demi tahap pada bukti II dengan pemotongan!
2. Menurut Anda apakah kita cukup membelajarkan siswa mengenai Teorema Pythagoras tanpa bukti? Mengapa?
3. Sebaiknya Anda memberi penjelasan dengan satu macam bukti atau beberapa macam?

4. KEGIATAN BELAJAR 4: Masalah tentang Kebalikan Teorema Pythagoras

Masalah 1

Diketahui tiga bilangan 60, 91, dan 109 memenuhi $60^2 + 91^2 = 109^2$ (periksalah lebih dulu). Apakah jika dibuat segitiga dengan panjang sisi 60, 91 dan 109 maka segitiga itu siku-siku?

Pembahasan

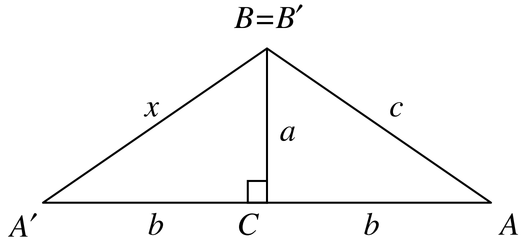
Umumnya kita mengenal rumus yang terkait dengan segitiga siku-siku adalah Rumus Pythagoras. Teorema atau dalil yang terkait dengan segitiga siku-siku adalah Teorema Pythagoras. Rumus Pythagoras merupakan bagian penting dari Teorema Pythagoras. Secara umum, pernyataan Teorema Pythagoras mengambil bentuk implikasi yaitu memuat kata “maka” atau sejenisnya. Satu hal yang hampir selalu dilupakan adalah apakah kebalikannya juga benar? Jika pada suatu segitiga dipenuhi kuadrat panjang sisi terbesar sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi-sisi yang lain maka segitiga itu siku-siku?

Ingat pada Teorema Pythagoras, sifat siku-siku segitiga sebagai sebab dan Rumus Pythagoras sebagai akibat. Bagaimana bila sebaliknya, Rumus Pythagoras sebagai sebab apakah berakibat sifat siku-siku pada segitiga?

Lihat kembali beberapa bukti Teorema Pythagoras pada bagian sebelumnya. Anda dapat mencermati bahwa beberapa bukti tersebut dapat pula dibalik penyajiannya, contohnya bukti dengan pemotongan.

Berikut ini disajikan sebuah bukti Kebalikan Teorema Pythagoras.

Pada segitiga ABC dengan panjang sisi a, b dan c berlaku $a^2 + b^2 = c^2$, akan dibuktikan bahwa segitiga ABC siku-siku di C.



Gambar 2.8

Buatlah segitiga $A'BC$ dengan sudut $A'CB$ siku-siku dan $A'C = b$. Misal $A'B' = x$.

Oleh karena segitiga $A'BC$ siku-siku di C maka menurut Teorema Pythagoras berlaku

$$a^2 + b^2 = x^2 \quad \ldots(1)$$

Di lain pihak, diketahui bahwa $a^2 + b^2 = c^2$ … (2)

maka dari (1) dan (2) diperoleh $x^2 = c^2$ atau $x = c$.

Jadi, $AB = A'B'$. Dengan demikian, oleh karena semua sisinya sama panjang maka segitiga ABC kongruen dengan $A'B'C$. Ini berakibat sudut ACB juga siku-siku. (terbukti).

Kebalikan Teorema Pythagoras dapat dinyatakan sebagai berikut:

"Pada sebarang segitiga ABC dengan $a^2 + b^2 = c^2$ maka sudut C siku-siku".

Akhirnya, Teorema Pythagoras dan Kebalikan Teorema Pythagoras dapat pula digabung menjadi sebuah teorema gabungan, sebagai berikut:

"Pada sebarang segitiga ABC, jika sudut C siku-siku maka $a^2 + b^2 = c^2$ dan sebaliknya, jika $a^2 + b^2 = c^2$ maka sudut C siku-siku".

Latihan 4

1. Diberikan beberapa pasangan panjang sisi segitiga berikut ini. Mana yang merupakan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku?

   (9, 40,41), (33,56,65), (13,84,85), (28,44,50), (11,50,51), (26,67,75)

2. Nyatakanlah Kebalikan Teorema Pythagoras **tanpa** menggunakan penyebutan simbol segitiga, seperti segitiga ABC atau segitiga PQR.

BAB III
LINGKARAN

A. Pengantar

Di sekitar kita banyak dijumpai benda-benda atau bagian benda yang berbentuk lingkaran.

(i) (ii) (iii)

Gambar 3.1

Alat-alat rumah tangga, roda-roda kendaraan dan benda-benda lain yang memiliki bagian-bagian berputar umumnya memiliki bagian yang berbentuk lingkaran. Contoh-contoh tersebut menunjukkan kegunaan konsep lingkaran yang penerapannya cukup luas di berbagai bidang. Pada bab ini Anda akan mempelajari tentang Lingkaran, sesuai Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar yang dituntut dalam Standar Isi Kurikulum SMP/ MTs.

B. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Anda diharapkan mampu menjelaskan pengertian lingkaran dan unsur-unsurnya, keliling dan luas lingkaran, menggunakan hubungan sudut pusat, panjang busur, luas juring dalam pemecahan masalah, menghitung panjang garis singgung persekutuan dua lingkaran dan melukis lingkaran dalam dan lingkaran luar suatu segitiga.

C. Materi Pembelajaran

Untuk membantu Anda agar menguasai kemampuan tersebut, pembahasan bab ini dikemas dalam 5 (lima) kegiatan belajar (KB) sebagai berikut:

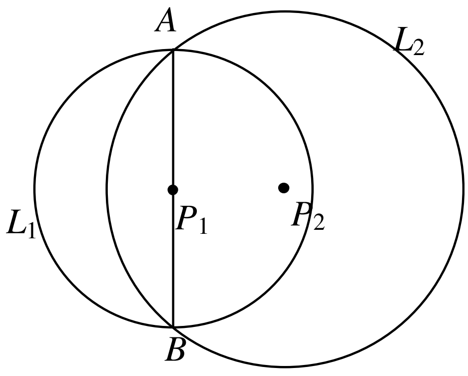
1. KB 1: Lingkaran dan Daerah Lingkaran: Unsur dan Bagian-bagiannya,
2. KB 2: Menghitung Keliling dan Luas Lingkaran,
3. KB 3: Menggunakan Hubungan Sudut Pusat, Panjang Busur, Luas Juring dalam Pemecahan Masalah,
4. KB 4: Menghitung Panjang Garis Singgung Persekutuan Dua Lingkaran, dan
5. KB 5: Melukis Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Suatu Segitiga.

Pada setiap pembahasan KB diakhiri dengan latihan yang hendaknya Anda kerjakan sebagai salah satu bahan refleksi apakah Anda telah memahami uraian dalam KB tersebut.

1. KEGIATAN BELAJAR 1: Lingkaran dan Daerah Lingkaran: Unsur dan Bagian-bagiannya.

Masalah 1

Pada gambar di bawah ini:



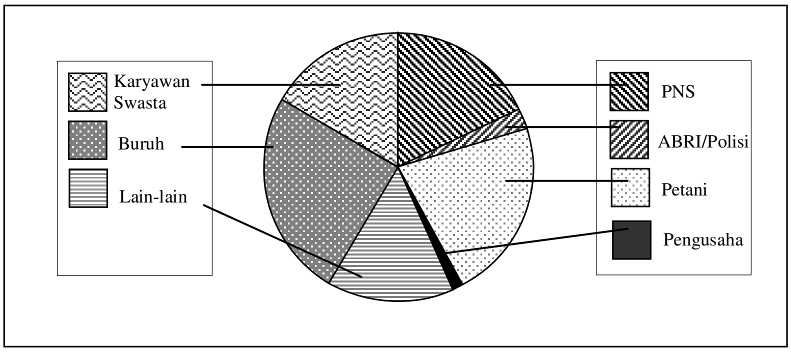
Gambar 3.2

Benarkah:

1) $\overline{AB}$ membagi lingkaran L_1 menjadi dua bagian yang sama?
2) L_2 membagi lingkaran L_1 menjadi dua bagian yang sama?

Masalah 2

Dalam suatu laporan survei kependudukan di suatu daerah, diperoleh data yang ditunjukkan dengan diagram sebagai berikut:



Gambar 3.3

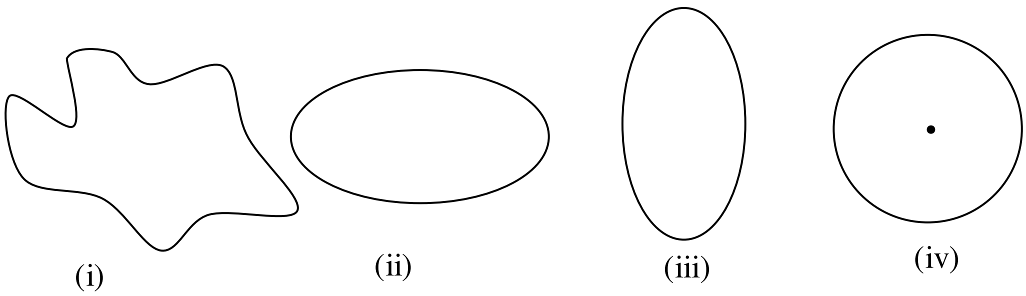
Apa hal utama yang ingin dinyatakan dalam diagram di atas?

Apa dasar matematika yang digunakan untuk menggambar diagram di atas?

a. Lingkaran dan Daerah Lingkaran

Pengantar

Jika kedua ujung seutas tali disambung diletakkan pada sebuah bidang datar, maka tali itu menggambarkan sebuah kurva tertutup. Ada beberapa kemungkinan yang dapat terjadi. Beberapa yang mungkin di antaranya:



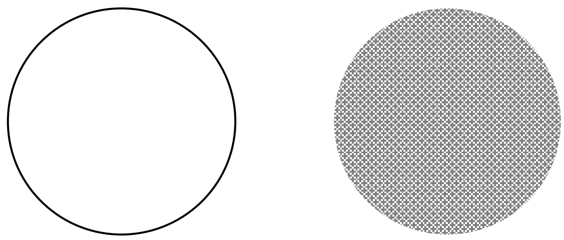
Gambar 3.4

Gambar 3.4 mempunyai sifat bahwa setiap titik pada garis lengkung tersebut berjarak sama terhadap sebuah titik di dalam garis lengkung itu. Garis lengkung itu disebut lingkaran.

Definisi: Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik (himpunan semua titik) yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu.

Titik tertentu tersebut disebut **pusat** lingkaran. Jarak tertentu disebut **jari-jari** lingkaran tersebut. Jarak tersebut biasa dilambangkan *r*. Pada konteks tertentu, jari-jari dimaksudkan sebagai ruas garis sepanjang pusat ke titik pada lingkarannya.

Daerah yang dibatasi oleh sebuah lingkaran disebut daerah lingkaran.

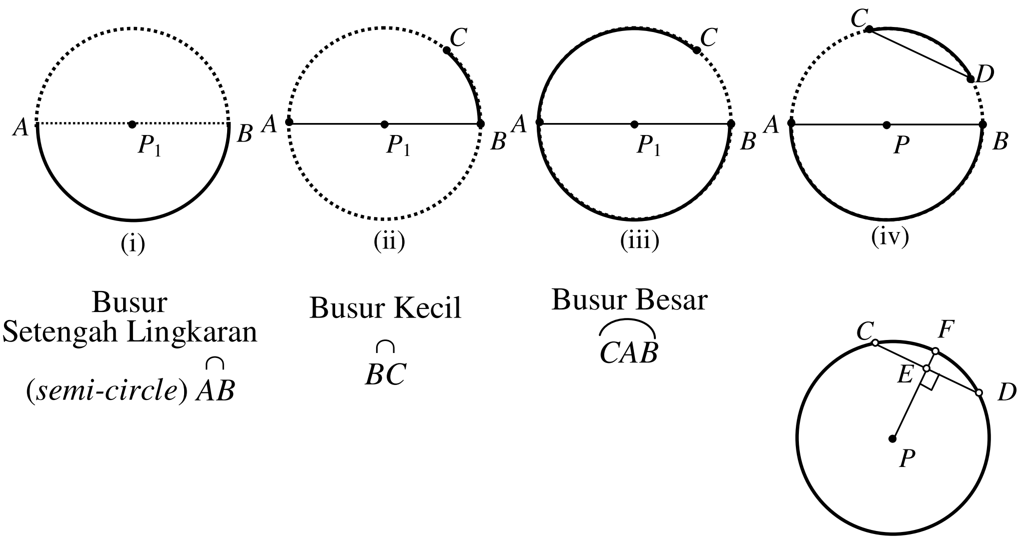


Lingkaran Daerah Lingkaran

Gambar 3.5

b. Unsur/Bagian-bagian Lingkaran dan Daerah Lingkaran

Bagian dari sebuah lingkaran dinamakan busur lingkaran. Ada busur setengah lingkaran, busur kecil dan busur besar. Jika tidak dinyatakan lain, maka umumnya yang dimaksud adalah busur kecil. Untuk menegaskan, busur besar ditandai tiga titik.



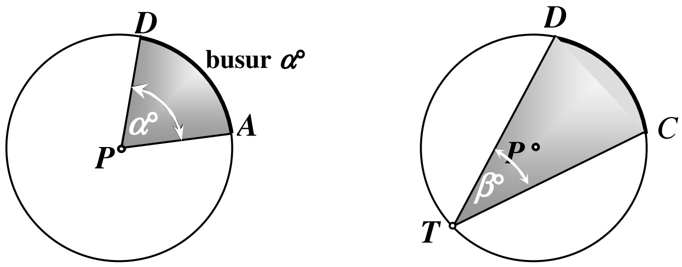
Gambar 3.6

Ruas garis penghubung dua titik ujung busur pada lingkaran dinamakan **talibusur.** Pada Gambar 3.6 (iv) $\overline{CD}$ adalah talibusur. Demikian juga $\overline{AB}$. Talibusur terpanjang, yaitu yang melalui pusat lingkaran, misalnya $\overline{AB}$ dinamakan **garis tengah (diameter).** Panjang diameter, *d*, adalah 2*r*. Kedua titik ujungnya dinamakan pasangan titik **diametral.** Dalam konteks tertentu diameter dimaksudkan selain sebagai ruas garis hubung ujung sebuah setengah lingkaran juga ukuran panjang ruas garis tersebut.

Pada Gambar 3.6 (v), $\overline{PF} \perp \overline{CD}$ di *E*. Ruas garis $\overline{PE}$ dinamakan **apotema** pada talibusur $\overline{CD}$, dan $\overline{EF}$ dinamakan **anak panah.**

Sudut yang bertitik sudut pusat lingkaran dan berkaki sudut jari-jari lingkaran disebut **sudut pusat.** Jika ditulis sudut pusat *APD* tanpa ada keterangan lain, maka yang dimaksud adalah sudut pusat terkecilnya (Gambar 3.7).

Sudut yang bertitik sudut titik pada lingkaran dan berkaki sudut talibusur yang melalui titik tersebut disebut **sudut keliling.**



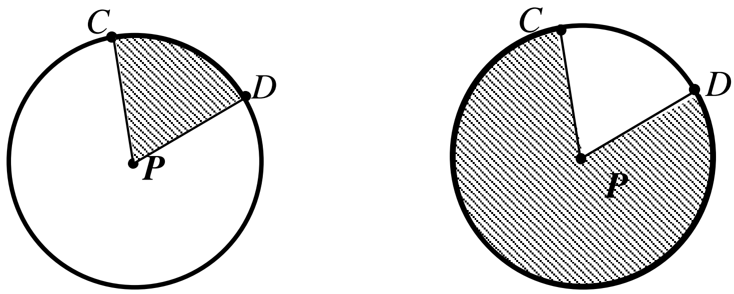
(i)
Sudut pusat *APD*

(ii)
Sudut keliling *CTD*

Gambar 3.7

Di depan sudut pusat sebesar $\alpha°$, ukuran besar busur dinyatakan dengan **busur $\alpha°$.**

Bagian daerah lingkaran yang dibatasi oleh sebuah busur dan dua jari-jari disebut **juring** atau **sektor** lingkaran (Gambar 3.8).

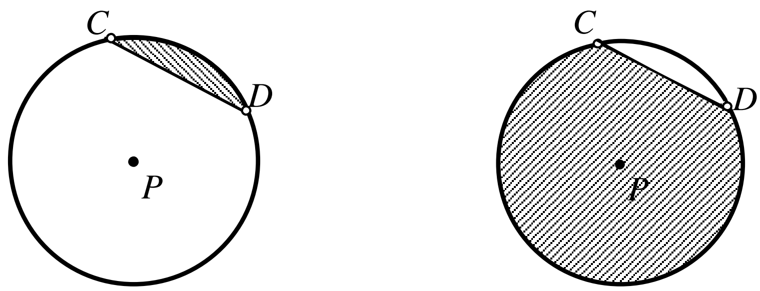


(i) Juring Kecil *CPD*

(ii) Juring Besar *CPD*

Gambar 3.8

Bagian daerah lingkaran yang dibatasi oleh sebuah busur lingkaran dan talibusur yang melalui kedua ujung busur disebut **tembereng** atau **segmen** lingkaran. Jika tidak ada keterangan lain, yang dimaksud adalah tembereng kecil. Namun untuk mempertegas, biasanya daerah tembereng yang dimaksud diarsir.



(i) Tembereng Kecil

(ii) Tembereng Besar

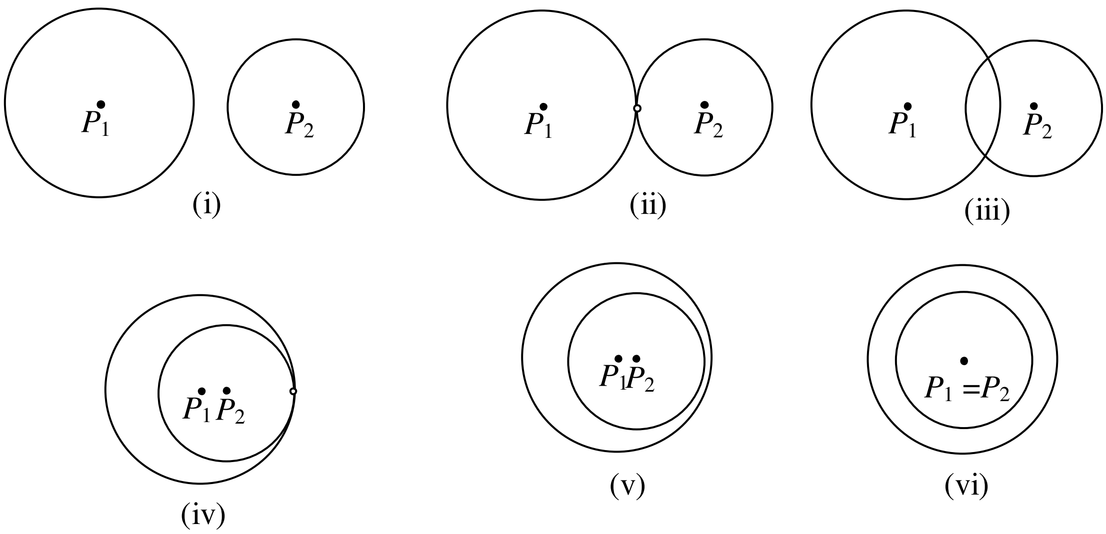
Gambar 3.9

Latihan 1

1. Kedua pertanyaan pada "Masalah 1" KB 1 jawabannya adalah "benar". Berdasarkan pengertian lingkaran pada uraian materinya, berilah penjelasan mengapa jawaban kedua pertanyaan adalah "benar"!

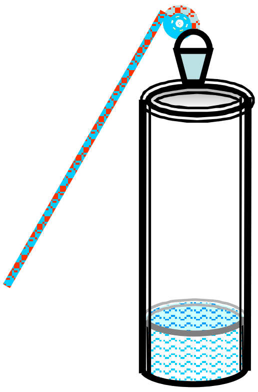
2. Apa syarat sebuah lingkaran dapat memotong lingkaran lain menjadi dua sama besar?

3. Diketahui $\odot(P_1, r_1)$ (lingkaran berpusat di titik P_1 dan berjari-jari r_1) dan $\odot(P_2, r_2)$. Jarak pusat kedua lingkaran, $P_1P_2 = d$. Nyatakan hubungan antara r_1, r_2, dan d yang terkait dengan kedudukan kedua lingkaran berikut:



2. KEGIATAN BELAJAR 2: Menghitung Keliling dan Luas Lingkaran

Masalah 1



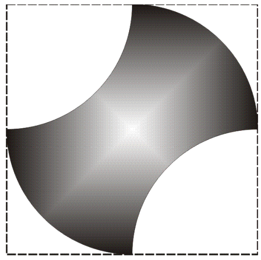
Gambar 3.10

Alas sebuah ember berada setengah meter di atas bibir sumur. Ketika diturunkan dan katrol berputar 6 kali, alas ember mengenai permukaan air sumur. Jika diameter katrol 28 cm, berapakah kedalaman permukaan air dari bibir sumur?

Masalah ini dapat dipecahkan jika memahami berapa meter ember turun ketika katrol sekali berputar. Dengan kata lain, berapa keliling lingkaran jika diameternya diketahui.

Masalah 2

Berapa luas kepingan logam jika diketahui panjang persegi di luar kepingan logam tersebut 28 cm dan semua garis lengkung adalah seperempat lingkaran?



Gambar 3.11

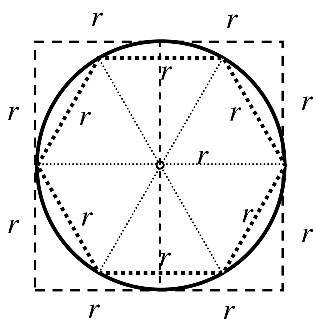
Masalah-masalah di atas menyangkut luas lingkaran yang akan dibahas pada bagian modul KB-2 ini.

a. Keliling Lingkaran

Keliling lingkaran adalah panjang seluruh busur pembentuk sebuah lingkaran. Karena busur tersebut merupakan garis lengkung, maka panjangnya tidak dapat dicari langsung menggunakan rumus-rumus yang yang terkait bangun datar sisi lurus. Namun karena yang telah tersedia adalah rumus-rumus luas bangun datar sisi lurus, maka dalam pembelajaran di SMP/MTs, rumus-rumus tersebut dapat digunakan sebagai sarana pendekatan menentukan rumus luas lingkaran.

Nilai pendekatan π

Perhatikanlah lingkaran berjari-jari *r*. Jika dilukis persegi (singgung) luarnya dan segienam beraturan bertitik sudut pada lingkaran tersebut, akan diperoleh beberapa hal sebagai berikut:



Gambar 3.12

1) Keliling lingkaran kurang dari keliling persegi luarnya. Sedangkan keliling persegi luarnya adalah 8*r*.
2) Keliling lingkaran lebih dari keliling segi enam dalamnya. Sedangkan keliling persegi luarnya adalah 6r.

3) Dari 1) dan 2), jika keliling lingkaran adalah K, maka $6r < K < 8r$. Berarti

$$3d < K < 4d \Leftrightarrow 3 < \frac{K}{d} < 4.$$

Hal tersebut berlaku untuk setiap lingkaran, dan nilai $\frac{K}{d}$ tertentu, yang dikenal sebagai π (dibaca: pi).

4) Berbagai usaha telah dimulai sejak berabad-abad yang lalu untuk menentukan ketepatan nilai π. Salah satunya dinyatakan bahwa: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. atau $3{,}14084507\ldots < \pi < 3.15285714$. Nilai pendekatan ke atas, yaitu $3\frac{10}{70}$ atau $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ sering digunakan dalam perhitungan.

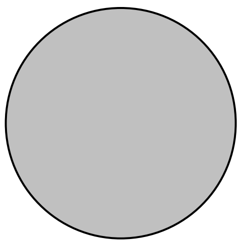
Adapun pendekatan nilai π sampai dengan 30 tempat desimal adalah: 3,141592653589793238462643383279 5.

Nilai pendekatan ke bawah yang biasa digunakan adalah 3,14.

Karena $\frac{K}{d} = \pi$, maka $K = \pi d$ atau $K = 2\pi r$ Jika panjang diameter lingkaran 1 (satu) satuan, maka keliling lingkaran adalah π.

b. Luas Lingkaran

Luas lingkaran adalah luas daerah yang dibatasi oleh lingkaran tersebut. Dalam pembelajaran di SMP, luas lingkaran dapat didekati melalui luas bangun datar sisi lurus. Untuk pendekatan tersebut daerah lingkaran dibagi menjadi beberapa (misal 12) juring kongruen seperti pada Gambar 3. 12.

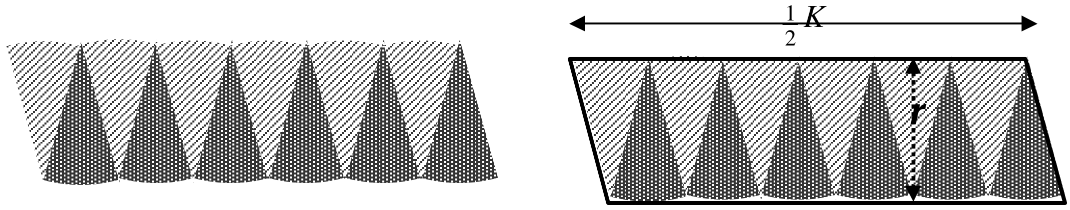


(i)

(ii)

Gambar 3.13

Juring-juring ditata seperti pada Gambar 3.14 (i).



(i) (ii)

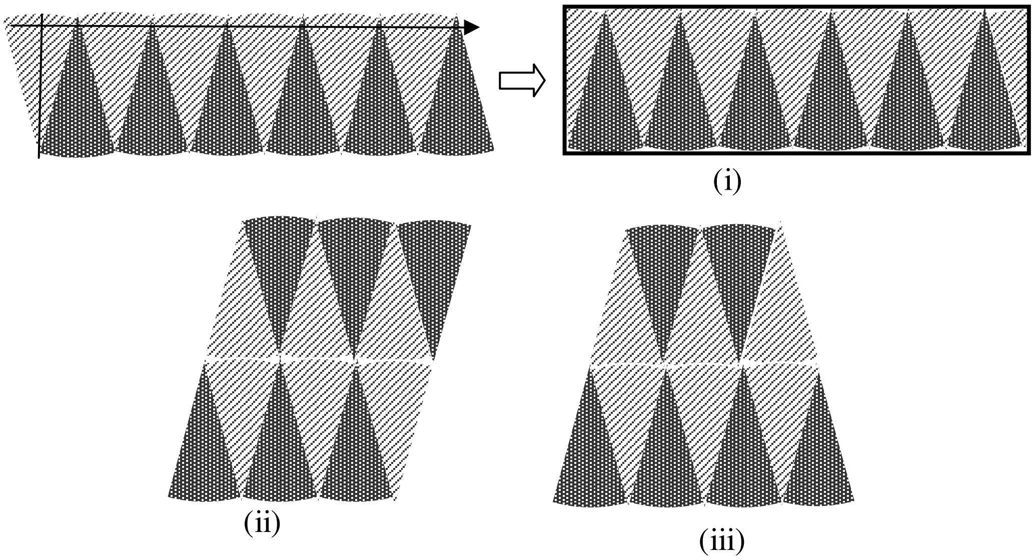
Gambar 3.14

Tataan juring tersebut dapat termuat dalam sebuah jajargenjang (Gambar 3.14 (ii)) yang panjangnya $\frac{1}{2}K$ (bandingkan dengan Gambar 13.2 (ii)). Jika pemotongan juringnya diperbanyak, maka tataan juring makin mendekati daerah jajargenjang. Dapat dipahami, bahwa jumlah luas juring hampir sama atau mendekati luas jajargenjang. Karena jumlah luas semua juring adalah luas lingkaran semula, maka luas lingkaran hampir sama dengan luas jajar genjang.

$$\begin{aligned}\text{Luas lingkaran} &\approx \text{luas jajargenjang}\\ &= \tfrac{1}{2}K \times r\\ &= \tfrac{1}{2} \times 2\pi r \times r\\ &= \pi r^2\end{aligned}$$

Jadi luas lingkaran yang panjang jari-jarinya r adalah πr^2.

Tinjauan: Penataan juring dapat dilakukan dengan beberapa cara lain, misalnya:

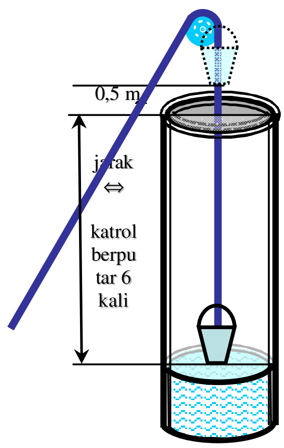


Gambar 3.15

Masih ada bentuk lainnya. Cobalah.

Contoh

Dari Masalah 1 pada awal KB 2 ini: Alas sebuah ember berada setengah meter di atas bibir sumur. Ketika diturunkan dan katrol berputar 6 kali, alas ember mengenai permukaan air sumur. Jika diameter katrol 28 cm, berapakah kedalaman permukaan air dari bibir sumur?



Gambar 3.16

Katrol berputar 6 kali berarti tali telah diulur sepanjang 6 × keliling katrol. Jadi kedalaman permukaan air dari bibir sumur $= 6 \times \pi \times d$

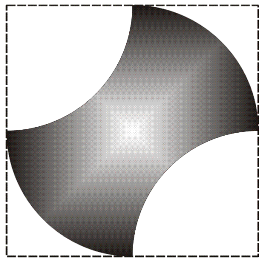
$$= 6 \times \frac{22}{7} \times 28$$

$$= 528 \text{ (cm)}$$

Jadi kedalaman permukaan air dari bibir sumur = 5,28 m – 0,5 m = 4,78 m.

Masalah 2

Berapa **luas** kepingan logam jika diketahui panjang sisi persegi di luar kepingan logam tersebut 28 cm dan semua garis lengkung adalah seperempat lingkaran?



dari: Gambar 3.11

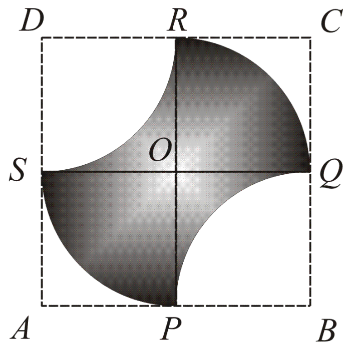
Jawab:

Alternatif I

Dalam persegi *PBQO*, luas daerah terarsir misal

L_1 = luas persegi *PQBO* − luas $\frac{1}{4}$ lingkaran berjari-jari 14 cm

$$= 14^2 - \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14^2 = 196 - 154 = 42 \text{ cm}^2$$



Gambar 3.17 (i)

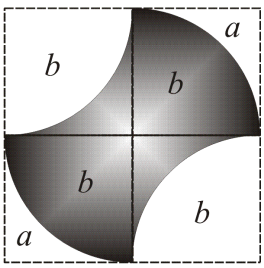
Luas semua daerah terarsir = $2 \times$ luas $\frac{1}{4}$ lingkaran + $2\,L_1$

$$= 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14^2 + 2 \times 42$$

$$= 308 + 84$$

$$= 392 \text{ cm}^2$$

Alternatif II



Gambar 3.17 (ii)

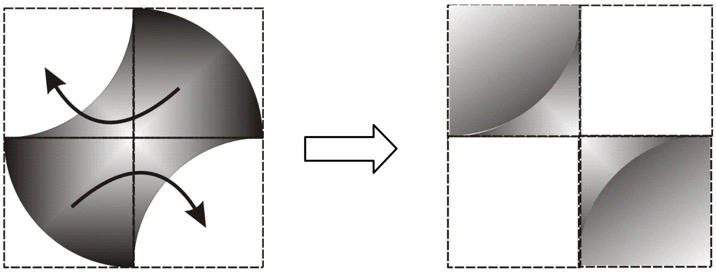
Jika *a* dan *b* menyatakan luas suatu daerah, maka luas yang diarsir = $2a + 2b$ = luas yang tidak diarsir. Jadi luas yang **diarsir** = luas yang tidak diarsir = $\frac{1}{2}$ luas persegi sekeliling kepingan.

Berarti luas kepingan logam = $\frac{1}{2} \times 28^2 = 392 \text{ cm}^2$

Alternatif III

Luas persegi = 28×28 cm^2 = 784 cm^2

Gambar kepingan itu dapat dimodifikasi sebagai berikut:

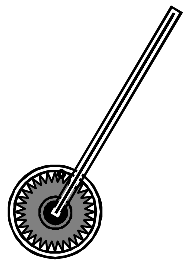


Gambar 3.17 (iii)

Tampak bahwa yang diarsir dan tidak diarsir sama luas = $\frac{1}{2} \times 784 = 392$ cm^2

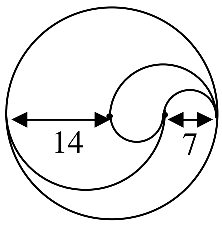
Latihan 2

1. Seorang siswa ingin membuat sebuah alat untuk mengukur panjang jalan. Bagian pokok alat itu berupa sebuah roda, sehingga jika alat itu didorong, sekali putar menunjukkan jarak yang ditempuh 1 m. Berapa diameter roda itu?

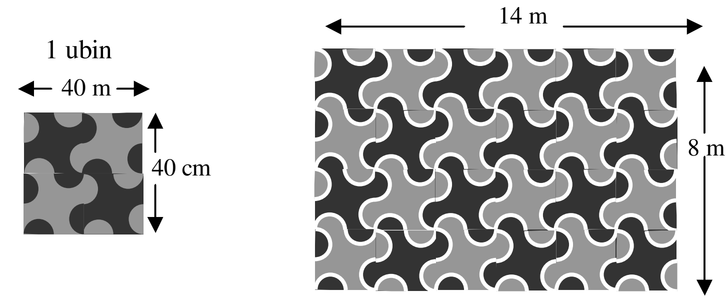


2. Diameter roda sebuah mobil adalah 52,5 cm. Jika mobil itu melaju dengan kecepatan 150 km/ jam, berapa RPM (*rotation per minute* = putaran per menit) kecepatan putar roda mobil tersebut?

3. Kurva pada gambar di samping merupakan lingkaran atau setengah lingkaran. Hitunglah panjang seluruh kurva tersebut.

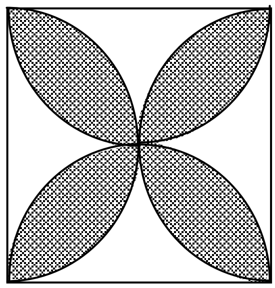


4. Setiap bagian terkecil gambar lengkung pada gambar pertama adalah setengah lingkaran. Sepanjang gambar lengkung pada ubin dicat dengan warna emas, sehingga setelah ubinnya terpasang tampak sebagian lantai seperti gambar kedua. Ubinnya berukuran 40 cm $\times$ 40 cm dan dipasang pada lantai berukuran 14 m $\times$ 8 m seperti tampak pada gambar kedua.

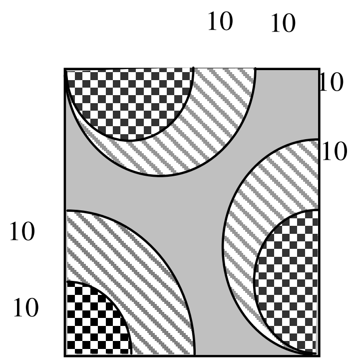


Jika 1 kaleng cat warna emas dapat digunakan untuk mengecat lengkungan sepanjang 80 m, berapa kaleng cat paling sedikit harus dibeli untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut?

5. Panjang sisi persegi pada gambar di samping adalah 42 cm. Hitunglah luas daerah yang diarsir.



6. Semua bagian yang berupa garis lengkung pada gambar di samping adalah setengah lingkaran. Hiasan ubin persegi dengan panjang sisi 40 cm seperti pada gambar di samping menggunakan 3 macam warna/arsiran. Hitunglah perbandingan luas daerah yang berbeda arsirannya tersebut.



3. KEGIATAN BELAJAR 3: Menggunakan Hubungan Sudut Pusat, Panjang Busur, Luas Juring dalam Pemecahan Masalah

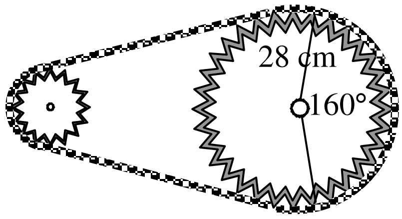
Masalah 1

Bagaimana membagi kue ulang tahun menjadi bagian-bagian yang sama besar?

Gambar 3.18

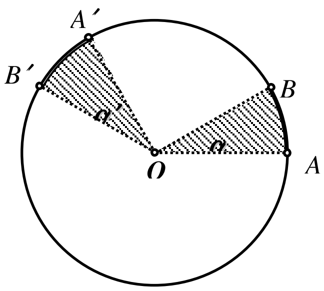
Masalah 2

Berapa panjang rantai yang mengenai gigi roda besar?



Gambar 3.19

a. Hubungan Sudut Pusat, Panjang Busur dan Luas Juring

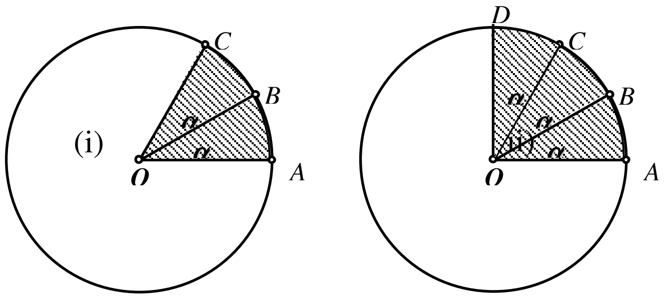


Gambar 3.20

Pada gambar 3.20, juring OAB diputar sehingga hasilnya adalah juring $OA'B'$. Dapat dipahami bahwa: $\angle\alpha' = \angle\alpha$

panjang busur $A'B'$ = panjang busur AB, dan

luas juring $OA'B'$ = luas juring OAB.



(i) (ii)

Gambar 3.21

Jika perputaran juring *OAB* dilakukan sedemikian sehingga $\overline{OA} \to \overline{OB}$ dan $\overline{OB} \to \overline{OC}$ seperti tampak pada Gambar 3.21 (i), maka besar juring $OAC = 2 \times$ juring *OAB*. Selanjutnya diperoleh:

besar $\angle AOC = 2\alpha = 2 \times$ besar $\angle AOB$

panjang busur AC = 2 × panjang busur *AB*, dan

luas juring $OAC = 2 \times$ luas juring *OAB*.

Jika perputaran juring *OAB* dilakukan sedemikian sehingga $\overline{OA} \to \overline{OC}$ dan $\overline{OB} \to \overline{OD}$ seperti tampak pada Gambar 3.21 (ii), maka besar juring $OAC = 3 \times$ juring *OAB*. Selanjutnya diperoleh:

besar $\angle AOD = 3\alpha = 3 \times$ besar $\angle AOB$,

panjang busur AD = 3 × panjang busur *AB*, dan

luas *juring OAD* = 3 × luas juring *OAB*.

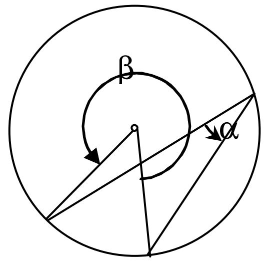
Secara umum diperoleh:

Dalam sebuah lingkaran, panjang sebuah busur dan luas juring yang bersangkutan sebanding dengan besar sudut pusat yang berhadapan dengan busur tersebut.

Pada Gambar 3.21 (ii): $\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{\overset{\frown}{BC}} = \dfrac{\angle AOD}{\angle DOC} = \dfrac{\text{luas juring } AOD}{\text{luas juring } DOC}$

b. Hubungan Sudut Pusat dan Sudut Keliling

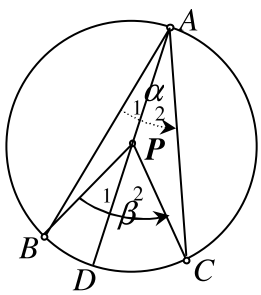
Jika β = 260^o, berapa radian besar sudut α pada Gambar 3.22?



Gambar 3.22

Soal di atas dapat diselesaikan berdasar pada suatu sifat:

Dalam sebuah lingkaran**, besar sudut pusat = 2 × besar sudut keliling yang menghadap busur yang sama dalam lingkaran tersebut.**



Gambar 3.23

Diketahui: Lingkaran P (lingkaran berpusat di P)

$\angle BAC$ sudut keliling dan $\angle BPC$ sudut pusat.

Akan dibuktikan besar $\angle BPC = 2 \times$ besar $\angle BAC$

Besar $\angle BPC$ dinotasikan dengan $u\angle BPC$

Bukti:

Tarik diameter $\overline{AD} \Rightarrow \Delta PAB$ dan ΔPAC sama kaki. $u\angle ABP = u\angle PAB$ dan $u\angle ACP = u\angle PAC$.

Pada ΔPAB, $u\angle ABP + u\angle PAB$ = pelurus $\angle APB$

$u\angle BPD$ = pelurus $\angle APB$

sehingga $u\angle BPD = u\angle ABP + u\angle PAB = 2u\angle PAB$ ... (1)

Pada ΔPAC, $u\angle ACP + u\angle PAC$ = pelurus $\angle APC$

$u\angle CPD$ = pelurus $\angle APC$

sehingga $u\angle CPD = u\angle ABP + u\angle PAC = 2u\angle PAC$ ... (2)

Dari (1) dan (2), $u\angle BPD + u\angle CPD = 2u\angle PAB + 2u\angle PAC$

$= 2(u\angle PAB + u\angle PAC)$

sehingga $u\angle BPC = 2 \times u\angle BAC$ (terbukti)

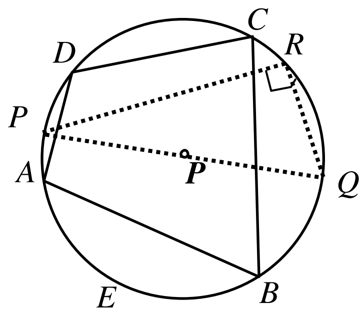
Pada gambar tersebut: $\beta = 2\alpha$.

Untuk Gambar 3.22, $\alpha = \frac{1}{2}$ (360° − 260°) = 50°.

$= \frac{50}{180}\pi$ radian $= \frac{5}{18}\pi$ radian.

c. Lebih Lanjut Tentang Hubungan Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Dari bagian b di atas dapat diperoleh beberapa hal:



Gambar 3.24

1) Dalam sebuah lingkaran, semua sudut keliling yang menghadap busur yang sama, sama besar.
2) Sudut keliling yang menghadap busur setengah lingkaran besarnya 90°.($u\angle QRP = 90°$)
3) Jika keempat titik sudut segi empat $ABCD$ terletak pada sebuah lingkaran, maka jumlah besar sudut yang berhadapan adalah 180°.

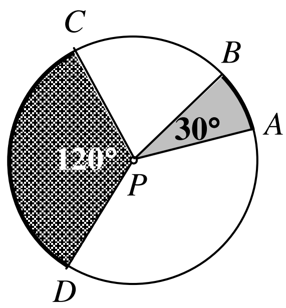
   $\rightarrow u\angle A + u\angle C = 180°$ dan $u\angle B + u\angle D = 180°$.

   Segiempat demikian dinamakan **segi empat talibusur** atau **segi empat siklis.**

Latihan 3

1. Dalam sebuah lingkaran, terdapat titik-titik A, B, C, dan D, sedemikian sehingga busur $\overset{\frown}{AB} = \alpha°$ dan busur $\overset{\frown}{CD} = \alpha°$. Dikatakan bahwa kedua busur kongruen (ditulis: $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$)
   a. Apakah panjang $\overline{AB}$ sama dengan panjang $\overline{BC}$? Beri penjelasan.
   b. Apakah panjang apotema ke $\overline{AB}$ sama dengan panjang apotema ke $\overline{BC}$? Beri penjelasan.

2. Diketahui $u\angle APB = 30°$, $u\angle DPC = 120°$, dan panjang busur $\overset{\frown}{CD} = 88$ mm, hitunglah:

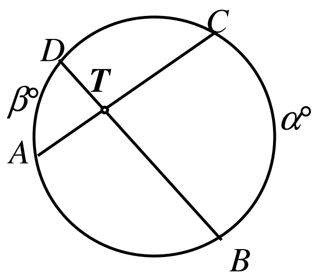


   a. panjang busur $\overset{\frown}{AB}$,
   b. panjang jari-jari lingkaran, dan
   c. luas juring *PCD* dan juring *PAB* berdasar luas juring *PCD*).

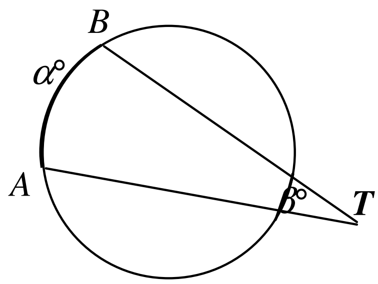
3. $\overline{AB}$ adalah sebuah talibusur pada sebuah lingkaran berpusat di *P* berjari-jari *r* dengan $AB = 2k$. $\overline{CD} = 2k$, adalah talibusur lain dalam lingkaran itu.
   a. Nyatakanlah jarak *P* ke $\overline{AB}$ dalam *R* dan *k*.
   b. Nyatakanlah jarak *P* ke $\overline{CD}$ dalam *R* dan *k*.
   c. Tuliskan suatu pernyataan yang menyatakan hubungan antara talibusur-talibusur yang panjangnya sama dalam sebuah lingkaran, kaitannya dengan apotemanya (jarak talibusur itu dari pusat lingkaran).

4. Sebuah talibusur lingkaran panjangnya 96 mm, berjarak 14 mm dari pusat lingkaran tersebut. Berapa jarak pusat ke talibusur yang panjangnya 80 mm?

5. Pada gambar di samping, $\alpha°$ dan $\beta°$ menyatakan besar busurnya (di depan sudut pusat $\alpha°$ dan $\beta°$). Buktikan bahwa $u\angle BTC = \frac{1}{2}(\alpha° + \beta°)$.



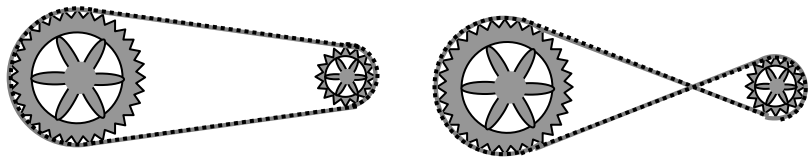
6. Dari gambar di samping, buktikan bahwa $u\angle ATB = \frac{1}{2}(\alpha° - \beta°)$.



7. *ABCD* adalah sebuah segi empat siklis. $u\angle A = 90°$, $AB = 14$ mm, $AD = 48$ mm dan $CD = 30$ mm. Hitung *BC*.

4. KEGIATAN BELAJAR 4: Menghitung Panjang Garis Singgung Persekutuan Dua Lingkaran

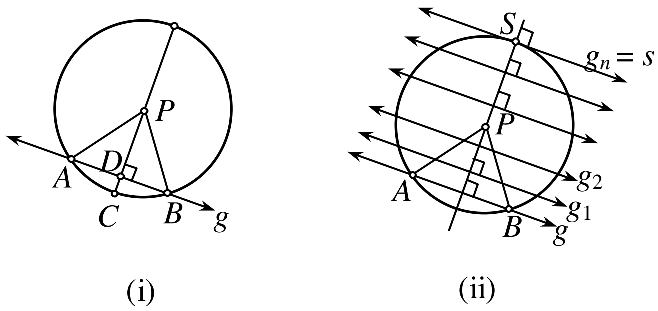
Masalah 1



Gambar 3.25

Bagaimana Anda menghitung panjang rantai yang diperlukan untuk menggerakkan satu roda jika roda lainnya diputar dengan kedudukan rantai seperti pada setiap gambar di atas?

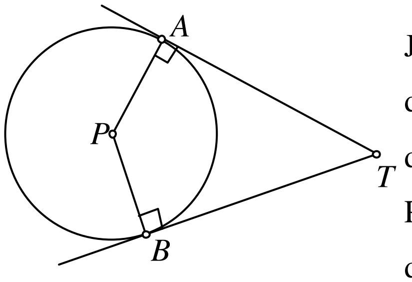
a. Garis Singgung Lingkaran



Gambar 3.26

Gambar 3.26 menunjukkan sebuah garis g memotong lingkaran berpusat P di titik A dan B. Dengan menarik ruas garis $\overline{PA}$ dan $\overline{PB}$ maka terbentuk segitiga samakaki yaitu ΔPAB. Dengan menarik diameter melalui D, titik tengah $\overline{AB}$, maka sesuai sifat segitiga samakaki, $\overline{PD} \perp \overline{AB}$.

Perhatikan Gambar 3.26 (ii). Jika garis g digeser sejajar g maka setiap kali diperoleh dua titik potong terhadap lingkaran, yang setelah melampaui pusat, jarak kedua titik potong makin mengecil. Pada akhirnya, kedua titik potong berimpit pada sebuah titik S. Titik S sebagai titik singgung garis $g_n = s$. Garis s ini disebut **garis singgung** lingkaran di titik S. Salah satu sifat yang tampak di sini ialah bahwa **garis singgung tegak lurus jari-jari yang melalui titik singgung.**

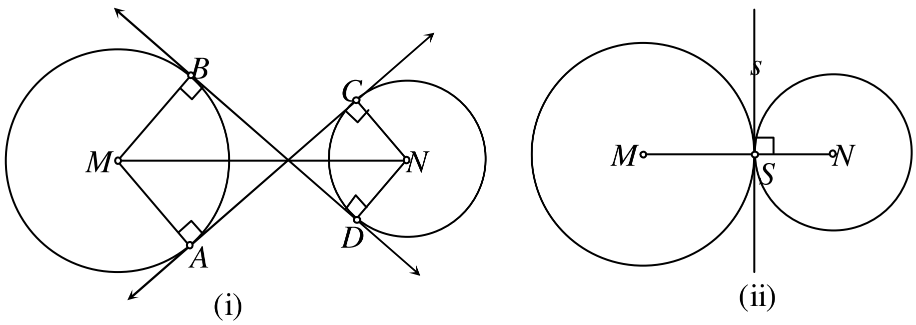


Gambar 3.27

Jika dari sebuah titik di luar sebuah lingkaran ditarik garis singgung, maka akan diperoleh dua garis singgung. Lihat Gambar 3.27.

Pada gambar tersebut, segiempat *TAPB* disebut **layang-layang garis singgung**.

b. Garis Singgung Persekutuan Dalam

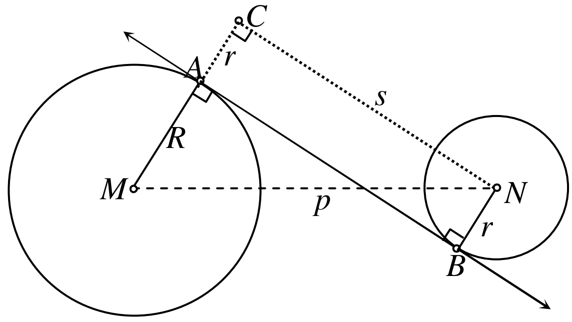


Gambar 3.28

Pada Gambar 3.28 (i) $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{BD}$ adalah garis-garis singgung persekutuan dalam antara lingkaran-lingkaran berpusat *M* dan *N*. Jika kedua lingkaran bersinggungan, maka garis singgung persekutuan dalamnya adalah sebuah garis yang tegaklurus garis-pusat (garis penghubung kedua pusat lingkaran) di titik singgung (Lihat Gambar 3.28 (ii)).

Panjang garis singgung persekutuan dalam

Panjang garis singgung persekutuan dalam adalah panjang ruas garis penghubung kedua titik singgung persekutuan dalam pada kedua lingkaran yang bersesuaian.



Gambar 3.29

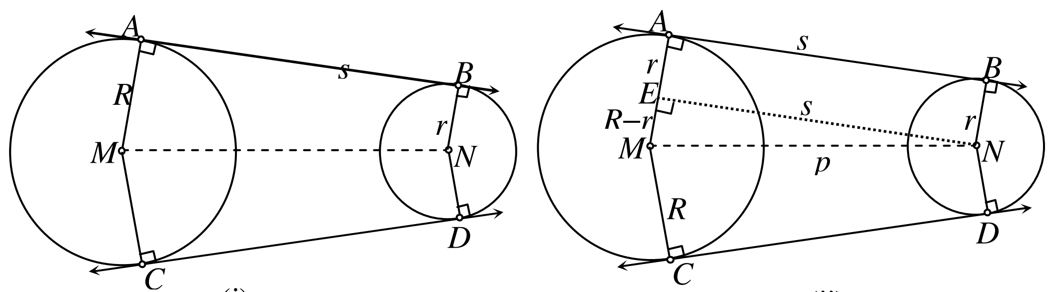
Berikut ini penjabaran panjang ruas garis singgung persekutuan dalam lingkaran (M, R) (berpusat M berjari-jari r) dan lingkaran (N, r) dengan jarak-pusat = p.

Dibuat garis $\overleftrightarrow{NC} \parallel$ garis singgung $\overleftrightarrow{AB}$ memotong perpanjangan jari-jari $\overleftrightarrow{MA}$ di C. Jika panjang (ruas) garis singgung persekutuan dalamnya = s satuan, NS = AB = s satuan.

Berdasarkan Teorema Pythagoras pada ΔMNC:

$$s^2 = p^2 - (R + r)^2 \Leftrightarrow s_{\text{dalam}} = \sqrt{p^2 - (R + r)^2}$$

c. Garis Singgung Persekutuan Luar



Gambar 3.30

Pada Gambar 3.30 (i) $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ adalah ruas-ruas garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran (M, R) dan (N, r), $R \geq r$. Untuk menentukan panjang (ruas) garis singgung persekutuan luarnya, perhatikan Gambar 3.30 (ii).

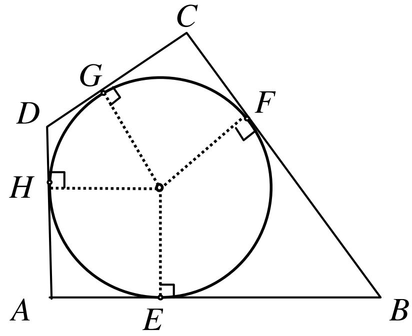
Tarik $\overline{NE} \parallel \overline{BA} \Rightarrow NE = BA = s$, panjang ruas garis singgung persekutuan luar. Berdasarkan Teorema Pythagoras pada ΔMNE:

$$s^2 = p^2 - (R - r)^2 \Leftrightarrow s_{\text{luar}} = \sqrt{p^2 - (R - r)^2}$$

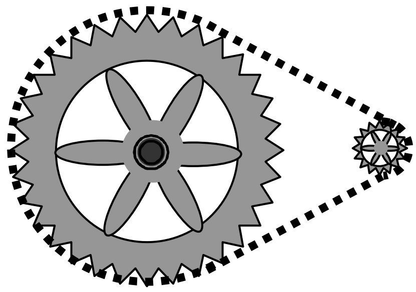
Latihan 4

1. Sebuah roda berputar dengan kecepatan 2160 RPM.
   a. Berapa RPS (*rotation per second;* putaran per detik) kecepatan itu?
   b. Berapa derajat yang dilampauinya dalam seperempat detik?

2. Pada sebuah segi empat dilukis empat garis singgung sehingga terbentuk segi empat garis singgung.
   a. Buktikanlah bahwa jumlah panjang sepasang sisi berhadapan sama dengan jumlah panjang sisi berhadapan lainnya.
   b. (lihat gambar) Buktikan bahwa
   $AE \times BE + DG \times CG = AH \times DH + BF \times CF$.



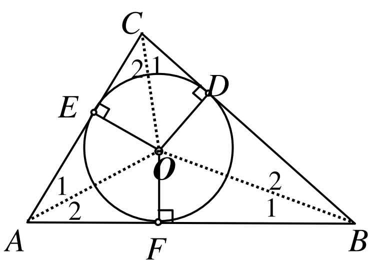
3. Dua buah roda berjari-jari masing-masing 105 cm dan 21 cm, kedua as-nya berjarak 168 cm. Pada keduanya dipasangi rantai seperti tampak pada gambar di samping. Berapa sentimeter panjang rantai yang tepat terpasang pada kedudukan tersebut?



5. KEGIATAN BELAJAR 5: Melukis Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Suatu Segitiga

a. Lingkaran Dalam

Lingkaran dalam sebuah bangun datar adalah sebuah lingkaran yang menyinggung dari dalam semua sisi bangun datar tersebut. Lingkaran dalam dari sebuah segitiga adalah sebuah lingkaran yang menyinggung dari dalam semua sisi segitiga tersebut. Lihat Gambar 3.31.



Gambar 3.31

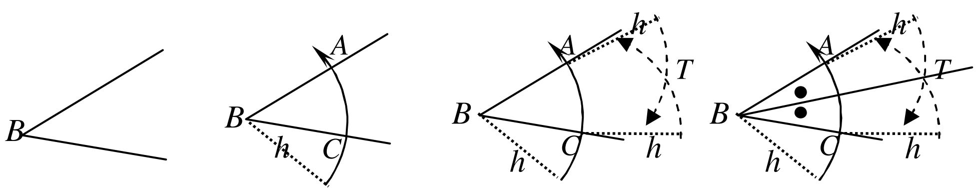
Segi empat *AFOE*, *BDOF,* dan *CEOD*, masing-masing adalah layang-layang garis singgung terhadap lingkaran dalam segitiga *ABC*. Dari sifat layang-layang diperoleh: $u\angle A_1 = u\angle A_2$, $u\angle B_1 = u\angle B_2$, dan $u\angle C_1 = u\angle C_2$. Dengan kata lain, *OA, OB*, dan *OC* berturut-turut adalah garis-garis bagi sudut *A, B,* dan *C*.

Berdasarkan analisis di atas, maka pusat lingkaran dalam sebuah segitiga adalah titik bagi (titik potong ketiga garis bagi) segitiga yang bersangkutan.

b. Melukis Lingkaran Dalam Suatu Segitiga

Berdasarkan penjelasan pada butir a di atas, maka untuk melukis lingkaran dalam suatu segitiga, terlebih dahulu harus ditentukan titik pusatnya, yaitu titik bagi segitiga tersebut. Dalam pembelajaran di kelas, Anda perlu mengingatkan kembali teknik membagi sebuah sudut menjadi dua sama besar (lihat Modul Geometri untuk Kelas VII); yaitu menggunakan dasar lukisan layang-layang atau menggunakan belah ketupat.

Contoh: Teknik melukis garis bagi $\angle B$:

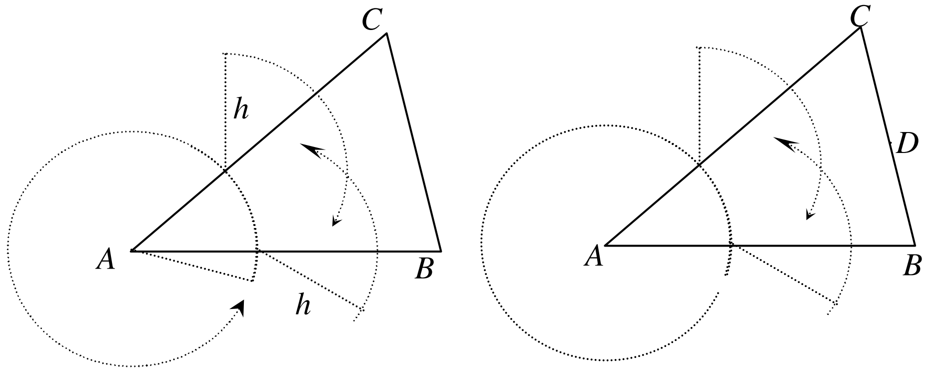


Gambar 3.32

1) Lukis sebuah busur lingkaran berpusat di titik *B*, memotong kaki sudut misal di titik *A* dan *C*.
2) Dengan panjang jari-jari sama, lukis sebuah busur lingkaran masing-masing berpusat di titik *A* dan *C*. Kedua busur berpotongan misal di titik *T*. Segi empat *BCTA* adalah belah ketupat.
3) Tarik $\overline{BT}$, diagonal belah ketupat *BCTA,* yang merupakan garis bagi sudut *B*.

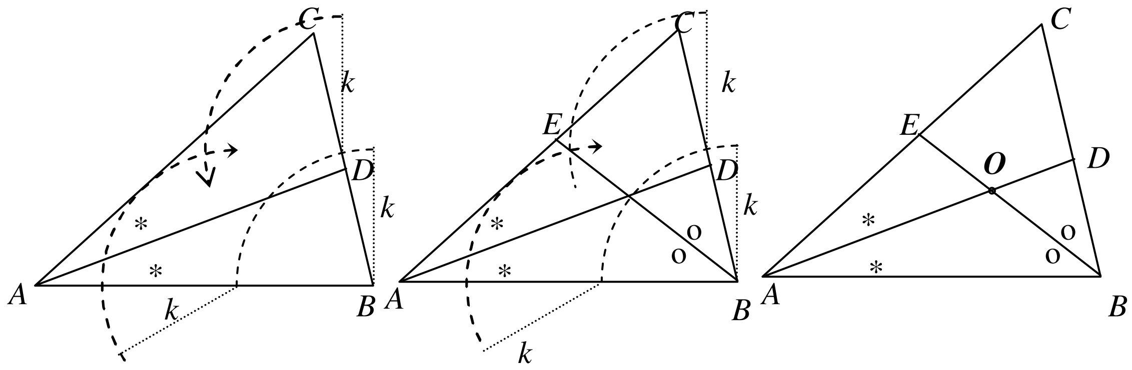
Untuk menentukan titik bagi pada ΔABC akan diperoleh pengerjaan sebagai berikut:

1) Misalkan segitiganya adalah ΔABC. Lukis garis bagi $\angle A$.



Gambar 3.33

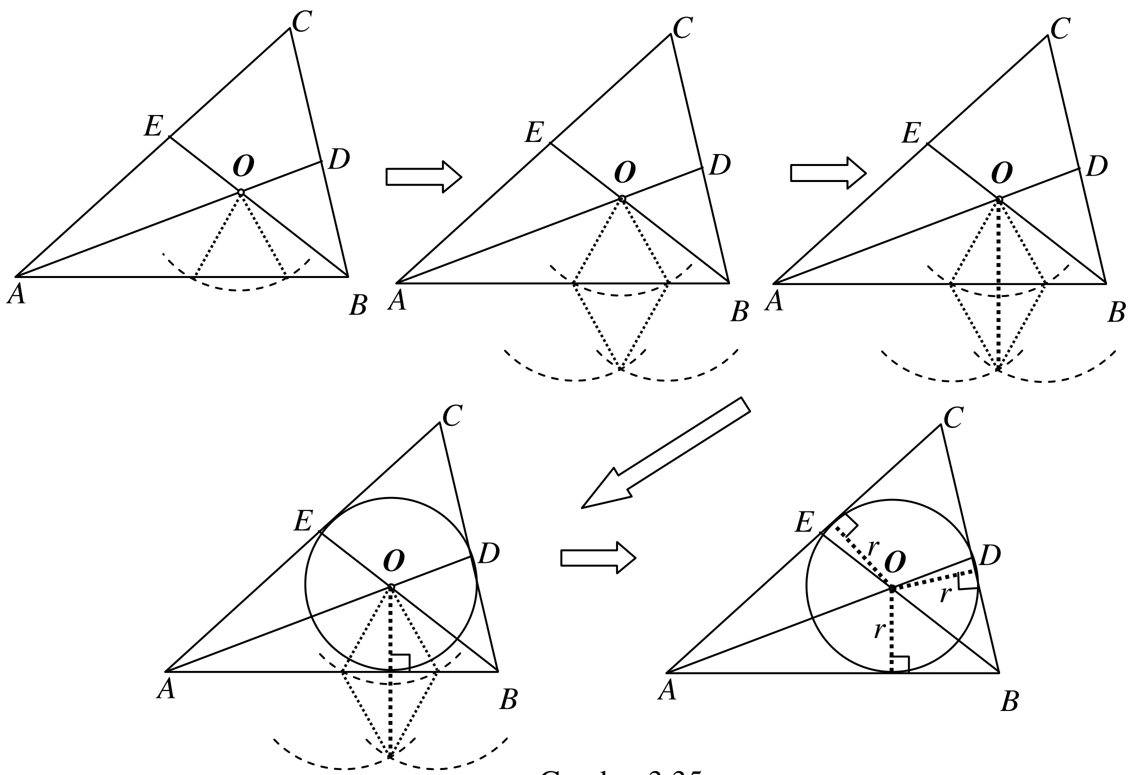
2) Lukis garis bagi $\angle B$, memotong garis bagi $\angle A$ di titik O.
(Jika dilukis, garis bagi $\angle C$ akan melalui O).



Gambar 3.34

3) Dari titik O, ditarik ruas-ruas garis yang tegak lurus sisi-sisi segitiga. (Cukup pada salah satu sisi, setelah diperoleh jaraknya ke salah satu sisi itu, misal r, maka lingkaran dalam dapat dilukis, yaitu lingkaran (O, r)).

(Contoh proses pada sisi $\overline{AB}$)

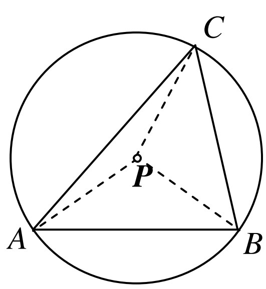


Gambar 3.35

c. Lingkaran Luar

Lingkaran luar sebuah bangun datar adalah sebuah lingkaran yang melalui semua titik sudut bangun datar tersebut. Lingkaran luar sebuah segitiga adalah sebuah lingkaran yang melalui ketiga titik sudut segitiga tersebut. Lihat Gambar 3.36.

Jika jari-jari lingkaran luar itu R, maka $PA = PB = PC = R$. Jadi ΔPAB, ΔPAC, dan ΔPBC masing-masing adalah segitiga sama kaki.



Gambar 3.36

Jika pada setiap segitiga sama kaki itu dilukis garis tingginya, maka sesuai sifat sumbu suatu ruas garis (seperti telah dipelajari di kelas VII SMP), garis tinggi itu masing-masing merupakan sumbu sisi-sisi yang bersangkutan. Jadi titik P, pusat lingkaran luar segitiga tersebut merupakan titik potong ketiga sumbu sisi segitiga.

Dari uraian di atas dapat dinyatakan bahwa untuk melukis lingkaran luar sebuah segitiga diperlukan letak titik pusatnya. Titik pusat itu diperoleh dengan menentukan titik potong sumbu-sumbu sisi-sisi segitiga tersebut. Adapun jari-jari lingkarannya sama dengan jarak pusat ke tiap titik sudut segitiga tersebut.

d. Melukis Lingkaran Luar Suatu Segitiga

Diketahui: ΔABC.

Lukislah: lingkaran luar ΔABC.

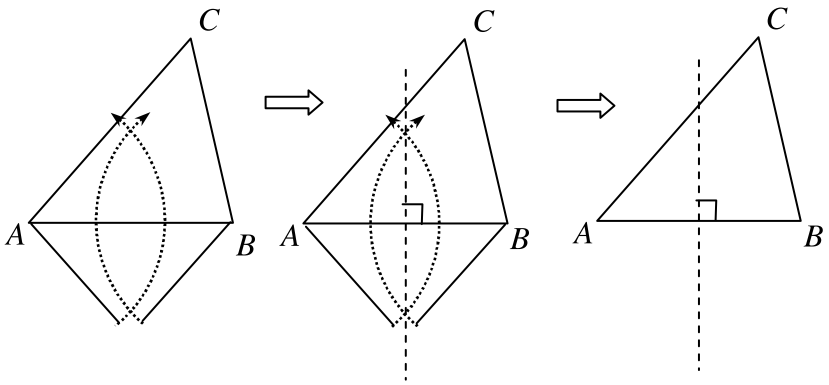
Jawab:

Analisis: lihat butir c di atas.

Menentukan titik pusat lingkaran luar = menentukan titik potong sumbu-sumbu sisi-sisi ΔABC.

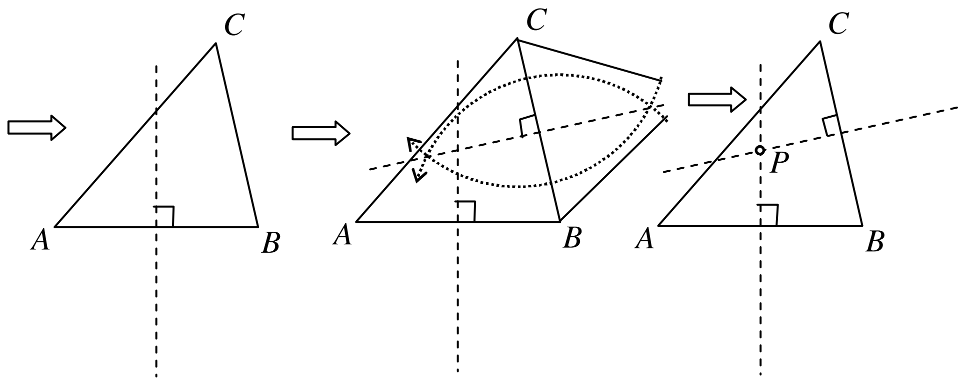
Langkah-langkahnya:

1) Lukis sumbu $\overline{AB}$



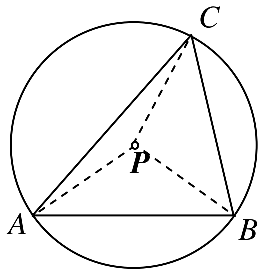
Gambar 3.37

2) Lukis sumbu $\overline{BC}$, memotong sumbu $\overline{AB}$ di P.



Gambar 3.38

3) P = pusat lingkaran luar.
Lukis lingkaran (P, PA),
yaitu lingkaran luar ΔABC.



Gambar 3.39

Latihan 5

1. Bangun-bangun datar berikut ini, manakah yang pasti mempunyai lingkaran dalam? Mana yang pasti mempunyai lingkaran luar?

   a. persegi
   b. persegi panjang
   c. jajar genjang
   d. trapesium sama kaki
   e. layang-layang
   f. belah ketupat

2. M adalah pusat lingkaran dalam sebuah segitiga ABC. Panjang jari-jari lingkaran tersebut r. Tariklah ketiga ruas garis dari M ke titik-titik sudut segitiga. Jika panjang sisi-si segitiga itu berturut-turut a, b, dan c, dan keliling segitiga itu dilambangkan $2s$,

   a. Nyatakan luas ΔMAB, ΔMBC, dan ΔMAB dalam r dan panjang sisi segitiga yang bersangkutan.
   b. Jumlahkan ketiga luas segitiga, kemudian buktikan bahwa $\boldsymbol{L = rs}$**.**

3. Gambarlah sebuah segitiga siku-siku. Dengan menggambar sumbu sisi-sisi siku-sikunya, tentukan pusat lingkaran luarnya. Jelaskan, bahwa pusat lingkaran luar setiap segitiga siku-siku terletak pada titik tengah hipotenusanya.

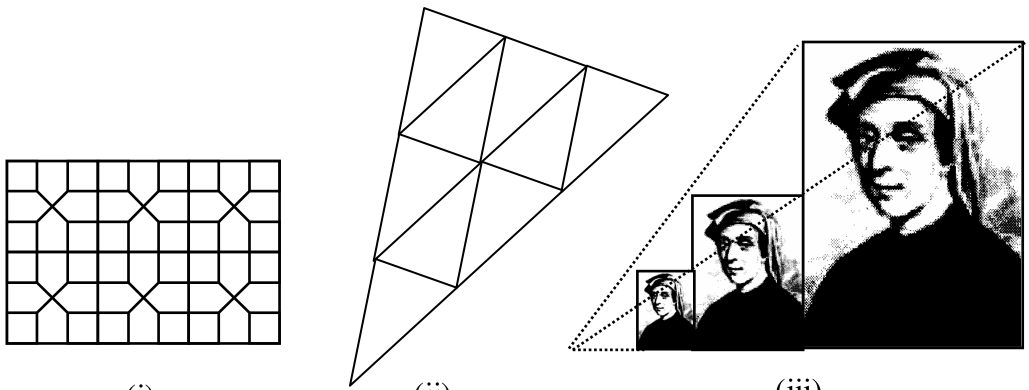
4. Sebuah segitiga ABC siku-siku di B, AB = 20 mm dan BC = 48 mm. Berapa panjang jari-jari lingkaran luarnya? Berapa pula panjang jari-jari lingkaran dalamnya?

BAB IV

BANGUN-BANGUN YANG KONGRUEN DAN YANG SEBANGUN

A. Pengantar

Di sekitar kita banyak dijumpai benda-benda atau bagian benda yang bentuknya sama, baik dengan ukuran sama maupun berbeda.



(i) (ii) (iii)

Gambar 4.1

Gambar 4.1 (i) dan (ii) memuat kekongruenan dan kesebangunan yang terkait dengan pengubinan. Lukisan Fibonacci pada Gambar 4.1 (i) berkaitan dengan perbesaran dan pengecilan foto yang menghasilkan bangun atau gambar sebangun

Pada bab ini Anda akan mempelajari tentang kekongruenan dan kesebangunan bangun datar dan penggunaannya dalam pemecahan masalah sesuai Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar yang dituntut dalam Standar Isi Kurikulum SMP/ MTs.

B. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Anda diharapkan mampu menjelaskan pengertian kekongruenan (kongruensi) dan kesebangunan bangun datar, sifat-sifat serta penggunaannya dalam pemecahan masalah, terutama yang berkaitan dengan kesebangunan segitiga.

C. Materi Pembelajaran

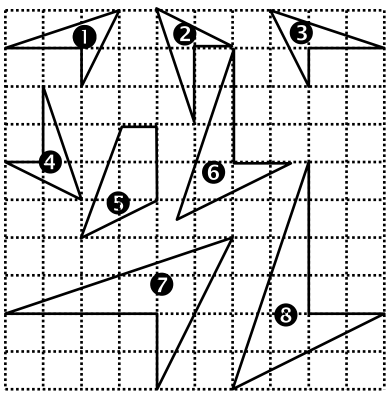
Untuk membantu Anda menguasai kemampuan tersebut, pembahasan bab ini dikemas dalam 4 (empat) kegiatan belajar (KB) sebagai berikut:

1. KB 1: Mengidentifikasi Bangun-Bangun Datar Yang Kongruen dan Sebangun,
2. KB 2: Mengidentifikasi Sifat-Sifat Dua Segitiga Kongruen,
3. KB 3: Mengidentifikasi Sifat-Sifat Dua Segitiga Sebangun, dan
4. KB 4: Menggunakan Konsep Kesebangunan Segitiga dalam Pemecahan Masalah.

Pada setiap pembahasan KB ada latihan yang hendaknya Anda kerjakan sebagai salah satu bahan refleksi apakah Anda telah memahami uraian dalam KB tersebut.

1. KEGIATAN BELAJAR 1: Mengidentifikasi Bangun-Bangun Datar yang Kongruen dan Sebangun

Masalah 1



Gambar 4.2

Pada Gambar 4.2 terdapat beberapa pasang bangun yang kongruen dan ada pula yang sebangun satu dengan lainnya. Adakah yang tidak mempunyai pasangan kongruen? Apa ciri-ciri dua bangun bersifat kongruen dan sebangun? Apa pula ciri-cirinya dua bangun bersifat sebangun?

Masalah 2

Dua segitiga yang ketiga pasang sudutnya sama, sebangun. Dua persegi panjang yang keempat pasang sudutnya sama, belum tentu sebangun. Mengapa?

a. Kekongruenan

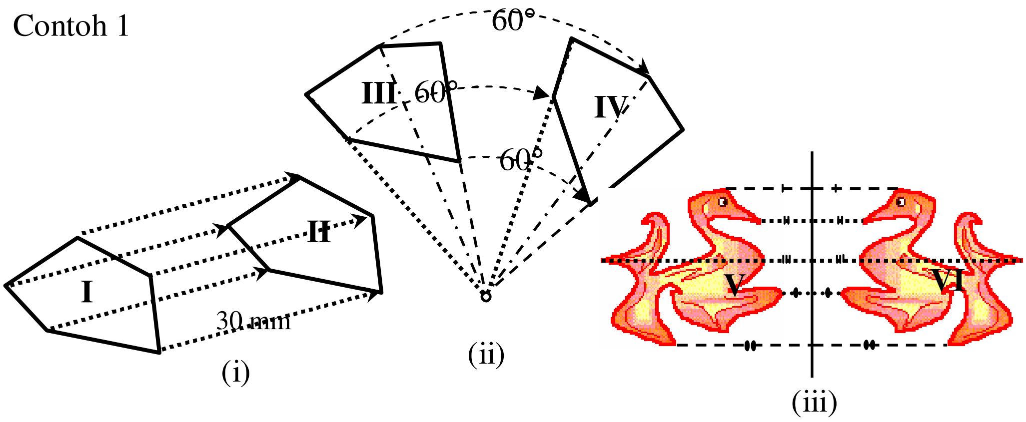
Dua buah bangun datar kongruen jika keduanya mempunyai bentuk dan ukuran yang sama. Kesamaan ukuran tersebut dapat dinyatakan dengan:

(i) setiap pasang sisi seletak sama panjang, dan

(ii) setiap pasang sudut seletak sama besar.

Dari keterangan di atas dapat dipahami, bahwa jika dua bangun kongruen, maka dengan mentransformasikannya (menggeser, memutar, atau merncerminkan), bangun yang satu dapat "menempati" bangun lainnya. Dari sini juga dapat dikembangkan, bahwa setiap dua bangun, yang **tepat** dapat saling menempati bangun lainnya merupakan pasangan bangun yang kongruen.

Contoh 1



Gambar 4.3

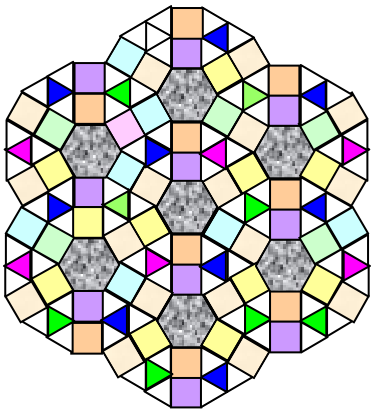
Bangun I dan II kongruen. Dengan menggeser 30 mm sesuai arah anak panah bangun I dapat menempati ("tepat menutup") bangun II. Bangun III dan IV kongruen. Dengan memutar di suatu titik sejauh 60° sesuai arah anak panah bangun III dapat menempati bangun IV. Bangun V dan VI kongruen. Dengan mencerminkan bangun yang satu pada suatu sumbu pencerminan bangun hasilnya dapat menempati bangun lainnya.

Contoh 2

1) Dua persegi yang mempunyai panjang sisi sama kongruen, karena (1) keduanya berbentuk sama, persegi (2) karena semua sisi sama panjang maka pasangan sisi seletaknya pun sama panjang. (3), pada masing-masing persegi keempat sudutnya masing-masing 90^o sehingga pada keduanya dapat dilakukan pasangan-pasangan sudut yang sama. Jadi memenuhi syarat-syarat kongruensi.
2) Dua lingkaran berjari-jari sama adalah dua bangun kongruen, karena keduanya dapat saling menempati yang satu dengan lainnya.

Contoh 3

Pada Gambar 4.4, ada beberapa jenis bangun yang kongruen, di antara beberapa jenis bangun yang kongruen tersebut terdapat bangun segitiga sama sisi, persegi, dan segi enam beraturan.



Gambar 4.4

Gabungan beberapa bangun tersebut juga membentuk bangun-bangun kongruen, misalnya segi-12, baik yang beraturan maupun yang tidak beraturan.

b. Kesebangunan

Kesebangunan dua bangun datar yang dibahas pada modul ini terutama kesebangunan yang berhubungan dengan gambar-gambar bangun datar bersisi lurus. Jika dua buah bangun datar yang bentuknya sama, tanpa harus memperhatikan ukurannya sama atau pun tidak, dikatakan sebangun. Yang dimaksud bentuk di sini berkaitan dengan pemodelan, di mana bentuk yang satu dapat diperoleh dari bentuk lainnya dengan skala tertentu (seperti ditunjukkan pada Gambar 4.1 (ii) dan (iii)). Pada Gambar 4.2, gambar No. 1 - 4 bentuknya sama dan ukuran sisi-sisinya satu sama lain sama. Jadi keempatnya kongruen, jadi juga sebangun. Sedangkan ukuran sisi-sisi gambar No. 5 sama dengan gambar No. 1 - 4, tetapi bentuknya berbeda. Jadi gambar 5 tidak mempunyai pasangan yang sebangun. Setiap gambar No. 1 – 4 sebangun dengan gambar No. 6, 7, dan 8. Gambar-gambar No. 6, diperoleh dari gambar No. 1 (2, 3, atau 4) dengan cara mengalikan panjang sisi-sisinya dengan 1,5. Gambar No. 7, dan 8 diperoleh dengan mengalikan 2 panjang sisi-sinya No. 1 (2, 3, atau 4). Jadi kecuali gambar No. 5, semua gambar pada Gambar 4.2 sebangun.

Dari kaitannya dengan skala tersebut maka pada setiap pasang bangun sebangun, berlaku:

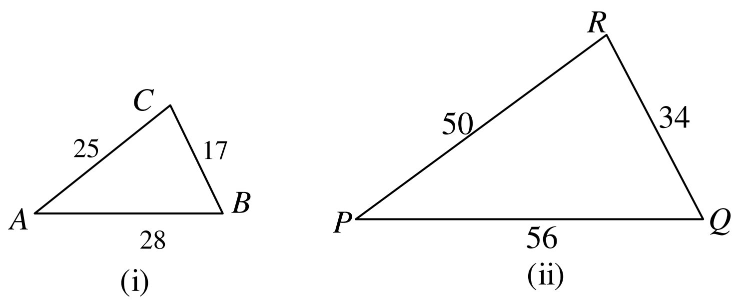
(i) semua pasang sisi seletak sebanding, dan

(ii) setiap pasang sudut seletak sama besar.

Untuk memberikan gambaran ketentuan di atas perhatikanlah dua contoh berikut:

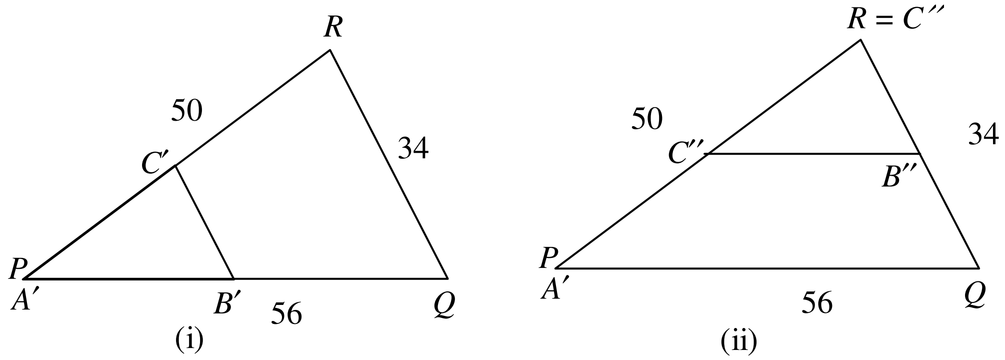
Contoh 1

Pasangan ΔABC dan ΔPQR Gambar 4.5 (i) dan (ii).



Gambar 4.5

Dengan menempatkan titik sudut A di P (Gambar 4.6 (i) atau titik sudut C di R (Gambar 4.6 (ii)), atau B di Q (tidak digambar), menunjukkan kesamaan-kesamaan sudut-sudut berikut: $u\angle A = u\angle P$, $u\angle\ C = u\angle R$, dan $u\angle B = u\angle Q$.



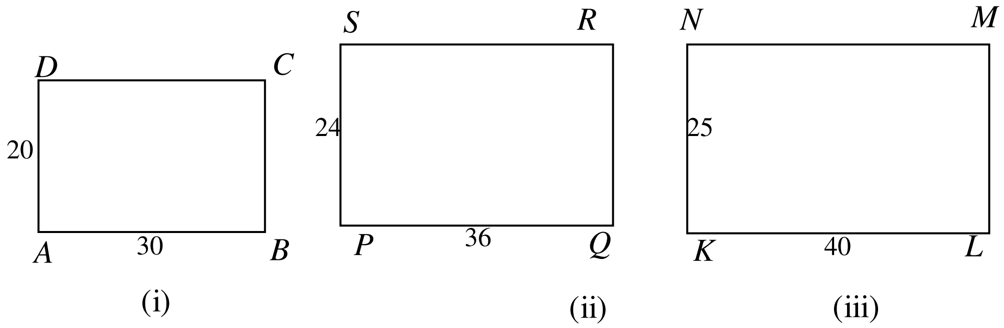
Gambar 4.6

Jika diperhatikan perbandingan panjang sisi-sisinya, maka $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{28}{56} = \dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{BC}{QR} = \dfrac{17}{34} = \dfrac{1}{2}$, dan $\dfrac{CA}{RP} = \dfrac{25}{50} = \dfrac{1}{2}$, atau $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$.

Contoh 2

Perhatikan persegipanjang-persegipanjang pada Gambar 4.7 (dengan satuan panjang sama).



Gambar 4.7

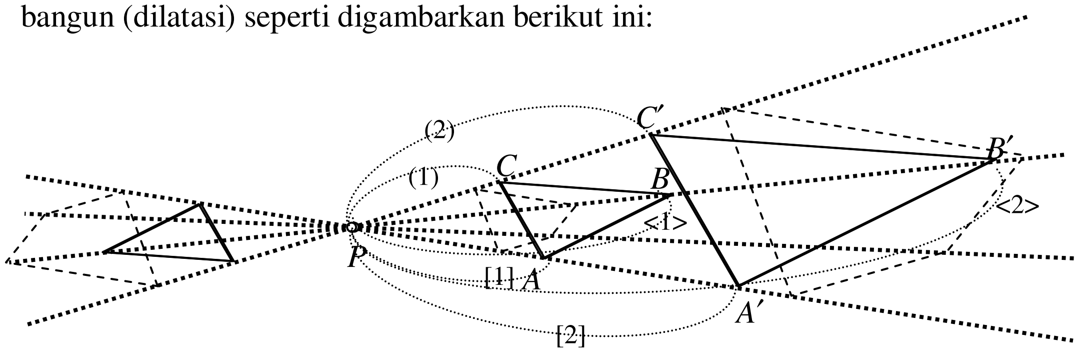
Ketiga persegipanjang memiliki kesamaan, yaitu besar setiap sudutnya 90^o. Artinya, ketiganya sepasang-sepasang sudutnya sama besar. Namun tentang kesebangunannya masih perlu diteliti.

$\frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PS} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$ dan $\frac{DC}{SR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$,

tetapi $\frac{AD}{KN} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ dan $\frac{AB}{KL} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

Dikatakan bahwa: persegi panjang *ABCD* sebangun dengan *PQRS* tetapi tidak sebangun dengan persegi panjang *KLMN*.

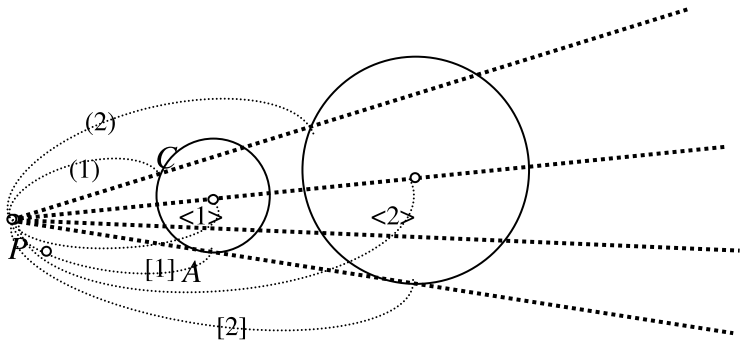
Seperti disinggung di atas, kesebangunan dapat dikaitkan dengan perkalian bangun (dilatasi) seperti digambarkan berikut ini:



Gambar 4.8

Pada gambar di atas, ΔABC dilipatduakan ukurannya menjadi $\Delta A'B'C'$. Dengan cara serupa, ke arah kiri ΔABC diperkecil sehingga panjang sisi-sisinya menjadi $\frac{3}{4}$ dari semula. Sedangkan segi empat terkecil dilipattigakan (ke arah kanan) dan ke arah kiri panjang sisi-sisinya $1\frac{1}{2}$ kali lipat dari panjang sisi-sisinya semula.

Perkalian seperti di atas dapat pula dikenakan terhadap bangun bersisi lengkung, misalnya lingkaran. Dapat mudah Anda pahami, bahwa semua lingkaran sebangun.



Gambar 4.9

Contoh 3

Apakah setiap dua persegi sebangun?

Penyelesaian: Misalkan perseginya adalah persegi *ABCD* dan *EFGH*.

1) keduanya berbentuk sama, persegi.
2) Keduanya mempunyai sifat, bahwa semua sudutnya 90°. Jadi setiap pasang sudut seletak sama besar = 90°, misal $u\angle A = u\angle E = 90^{\circ}$.
3) Misalkan panjang sisi persegi *ABCD* adalah a satuan, dan panjang sisi persegi *EFGH* adalah b satuan maka $AB = BC = CD = CA = a$ satuan dan $EF = FG = GH = HE = b$ satuan.

   $AB : EF = a : b.$

   $BC : FG = a : b.$

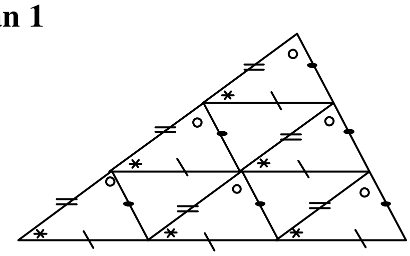
   $CD : GH = a : b.$

   $DA : HE = a : b.$

   Jadi setiap pasang sisi seletak sebanding

   Dari 1), 2) dan 3) maka dipenuhi bahwa kedua persegi sebangun.

Latihan 1

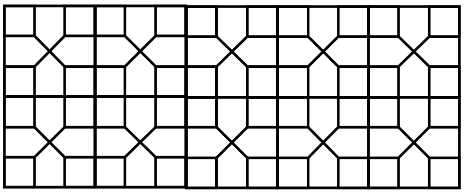
1. 

Pada bangun di samping ini, tanda yang sama menyatakan ukuran yang sama. Panjang sisi segitiga terkecil berturut-turut a, b, dan c satuan.

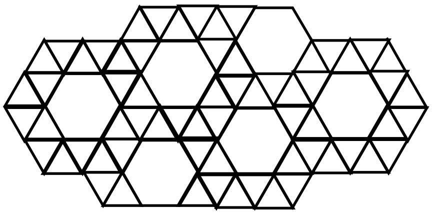
a. Berapa macam segitiga kongruen terdapat pada gambar tersebut? Berapa masing-masing ukuran panjang sisinya? Berapa buah masing-masing?
b. Berapa macam jajargenjang kongruen terdapat pada gambar tersebut? Berapa masing-masing ukuran panjang sisinya? Berapa buah masing-masing?
c. Berapa macam trapesium kongruen terdapat pada gambar tersebut? Berapa masing-masing ukuran panjang sisinya? Berapa buah masing-masing?

2. Identifikasikanlah bangun-bangun yang sebangun dan bangun-bangun yang kongruen dalam setiap gambar atau bagian gambar berikut.

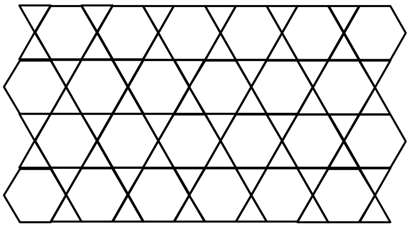
a.



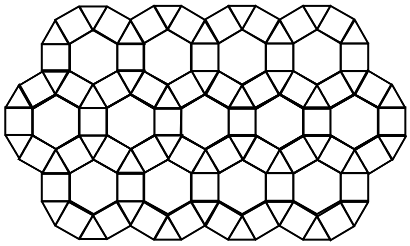
c.



b.



d.



3. a. Apakah semua segitiga samakaki sebangun? Beri penjelasan!
   b. Apakah semua segitiga samasisi sebangun? Beri penjelasan!
   c. Untuk n tertentu, apakah semua segi-n sebangun satu dengan lainnya?
   d. Untuk n tertentu, apakah semua segi-n beraturan sebangun satu dengan lainnya?
4. Bangun atau bagian masing-masing gambar di samping ini bangun datar. Adakah di antara bagian-bagian gambar tersebut yang kongruen? Yang sebangun? Beri penjelasan.

2. KEGIATAN BELAJAR 2: Mengidentifikasi Sifat-Sifat Dua Segitiga Kongruen

Masalah

Diketahui ΔABC, $u\angle A = 30°$, $AB = 12$ cm, dan $BC = 8$ cm, dan ΔPQR, $u\angle P = 30°$, $PQ = 12$ cm, dan $QR = 8$ cm. Apakah ΔABC dan ΔPQR kongruen?

Telah dipelajari dalam KB 1, bahwa:
Dua buah bangun datar kongruen jika keduanya mempunyai bentuk dan ukuran yang sama. Kesamaan ukuran tersebut dapat dinyatakan dengan:

(i) setiap pasang sisi seletak sama panjang, dan
(ii) setiap pasang sudut seletak sama besar

Hal di atas dapat dinyatakan dengan lebih singkat, bahwa dua segitiga kongruen jika setiap pasang dari ketiga sisinya sama panjang dan setiap pasang dari ketiga sudutnya yang bersesuaian sama besar. Namun karena keterlukisan atau kepastian terjadinya sebuah segitiga ditentukan cukup dengan tiga di antara keenam unsur-unsurnya (tiga sisi dan tiga sudut), maka syarat kongruensi dari dua segitiga pun dapat lebih disederhanakan.

Penyederhanaan itu didasarkan pada yang telah Anda dipelajari tentang syarat-syarat keterlukisan sebuah segitiga pada modul Geometri lainnya. Dalam melukis sebuah segitiga dapat digambarkan bahwa Anda harus melukis segitiga dengan ketentuan-ketentuan yang menggambarkan adanya segitiga lain yang telah diketahui. Atau dengan kata lain, lukisan yang Anda kerjakan haruslah kongruen dengan segitiga yang diketahui ketentuannya tersebut.

Dari lukisan segitiga telah Anda dapatkan bahwa sebuah segitiga dapat dilukis jika salah satu persyaratan berikut dipenuhi.

(i) segitiga yang diketahui ketiga sisinya (disingkat: *s*, *s*, *s*) dengan mengingat bahwa jumlah panjang dua sisi harus lebih dari panjang sebuah sisi lainnya,

(ii) segitiga yang diketahui panjang dua buah sisinya dan besar sudut apit kedua sisi tersebut (disingkat: *s*, *sd*, *s*),

(iii) segitiga yang diketahui panjang salah satu sisinya dan besar kedua sudut pada sisi tersebut (disingkat: (*sd*, *s*, *sd*)), atau

(iv) segitiga yang diketahui besar dua buah sudutnya dan panjang sebuah sisi di hadapan salah satu sisi yang diketahui. (disingkat: *sd*, *sd*, *s*).

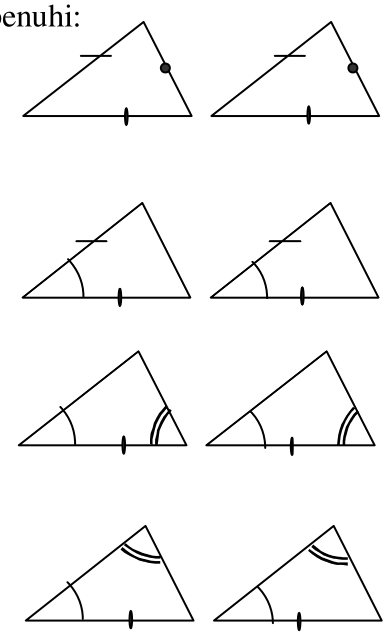
Berdasar penjelasan-penjelasan di atas maka dapat dikatakan, dua buah segitiga kongruen jika salah satu dari kondisi berikut ini dipenuhi:

(1) setiap pasang dari ketiga pasang sisi seletak sama panjang (*s*, *s*, *s*),

(2) setiap pasang dari dua pasang sisi seletak sama panjang dan sudut apitnya sama besar. (*s*, *sd*, *s*),

(3) satu pasang sisinya sama panjang dan setiap pasang dari kedua sudut yang berkaki sudut sisi tersebut sama besar (*sd*, *s*, *sd*), atau

(4) setiap pasang dari dua sudutnya sama besar dan panjang sisi di hadapan salah satu sudutnya sama besar. (*sd*, *sd*, *s*).



Gambar 4.10

Adapun kondisi yang keempat dapat dikembalikan yang ketiga, karena dengan dua sudut diketahui, maka sudut ketiga dapat ditentukan. Akibatnya, yang keempat dapat dibawa kepada keadaan kongruensi (*sd*, *s*, *sd*).

Contoh

Segitiga samakaki adalah segitiga yang mempunyai dua sisi yang sama panjang. Buktikan bahwa sudut-sudut pada kaki yang sama dalam sebuah segitiga, sama besar.

Diketahui: ΔABC; $CA = CB$

Buktikan: $u\angle A = u\angle B$

Bukti: Tarik garis berat $\overline{CD} \Rightarrow AD = BD$

Perhatikan ΔCDA dan ΔCDB

$AC = BC$ (diketahui)

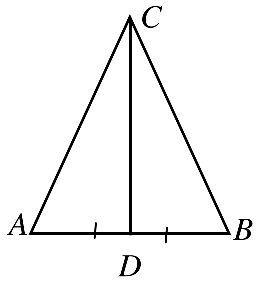
$CD = CD$ (bersekutu)

$AD = BD$ (akibat garis berat)

ΔCDA dan ΔCDB kongruen

(dapat ditulis: $\Delta CDA \cong \Delta CDB$)

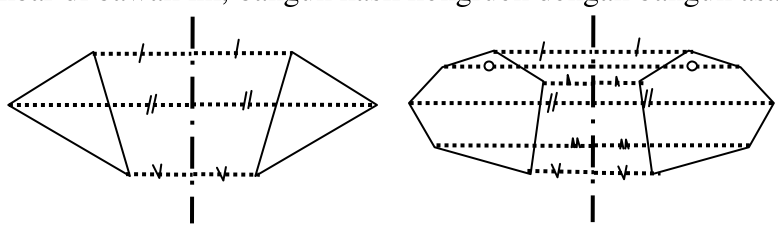
Akibat: $u\angle A = u\angle B$ (terbukti).



Gambar 4.11

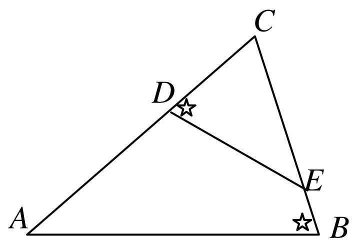
Latihan 2

1. Diketahui ruas garis $\overline{AB}$ dengan D titik tengahnya. Sebuah garis g melalui D tegaklurus $\overline{AB}$. Buktikanlah bahwa untuk setiap titik T pada g maka $TA = TB$.
2. Dalam ΔPQR samakaki dengan puncak R, pada perpanjangan $\overrightarrow{PQ}$ ditetapkan titik A dan pada perpanjangan $\overrightarrow{QP}$ ditetapkan B sedemikian sehingga $PB = QA$. Buktikanlah bahwa $u\angle PCB = u\angle QCA$ dan CB = CA.
3. Buktikanlah bahwa kedua garis tinggi ke kaki-kaki sebuah segitiga sama kaki sama panjang.
4. Diketahui sebuah lingkaran berpusat di P, $\overline{AB}$ adalah salah satu talibusurnya dan D adalah titik tengah talibusur tersebut. Buktikanlah bahwa $\overline{PD} \perp \overline{AB}$
5. Diketahui $\overline{AB}$ adalah salah satu talibusur sebuah lingkaran berpusat di P, D pada $\overline{AB}$ dan $\overline{PD} \perp \overline{AB}$. Buktikanlah bahwa $AD = BD$.
6. $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ adalah dua tali busur pada lingkaran berpusat di P, dengan $AB = CD$. Buktikanlah bahwa jarak P ke $\overline{AB}$ = jarak P ke $\overline{CD}$
7. Jelaskan, mengapa dalam sebuah pencerminan, misalnya seperti pada gambar di bawah ini, bangun hasil kongruen dengan bangun asalnya!



3. KEGIATAN BELAJAR 3: Mengidentifikasi Sifat-Sifat Dua Segitiga Sebangun

Masalah



Gambar 4.12

Apakah ΔABC dan ΔEDC sebangun? Apa syarat atau ciri-ciri kesebangunan dipenuhi? (Ruas garis $\overline{DE}$ dalam Gambar 4.12 disebut ruas garis anti-paralel terhadap $\overline{AB}$).

a. Teorema Kesebandingan

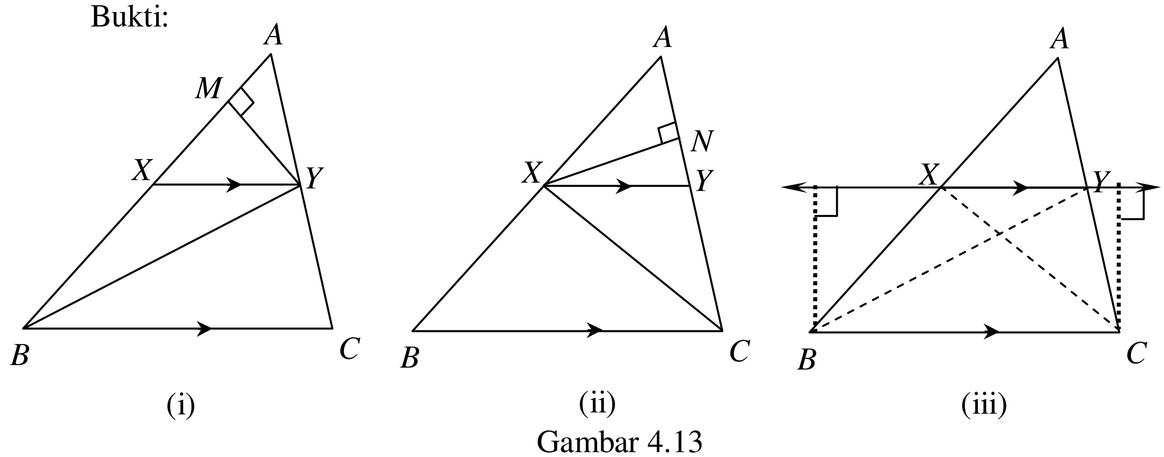
Teorema: Jika sebuah garis sejajar dengan salah satu sisi segitiga memotong kedua sisi yang lain pada dua titik berbeda, maka garis itu membagi sisi-sisi terpotong itu menjadi bagian-bagian yang panjangnya sebanding.

Diketahui: ΔABC

$\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

Buktikan: $\dfrac{AX}{AB} = \dfrac{AY}{AC}$

Bukti:



Gambar 4.13

Tarik $\overline{BY}$. Tarik $\overline{YM} \perp \overline{AB}$

Perhatikan ΔAXY dan ΔXBY.

$\overline{YM}$ adalah garis tinggi ΔAXY dan ΔXBY.

$$\frac{\text{Luas } \Delta XBY}{\text{Luas } \Delta AXY} = \frac{\frac{1}{2} XB \times YM}{\frac{1}{2} AX \times YM} = \frac{XB}{AX} \text{ .... (1)}$$

Tarik $\overline{CX}$. Tarik $\overline{XN} \perp \overline{AC}$

Perhatikan ΔAXY dan ΔXCY.

$\overline{XN}$ adalah garis tinggi ΔAXY dan ΔXCY.

$$\frac{\text{Luas } \Delta XCY}{\text{Luas } \Delta AXY} = \frac{\frac{1}{2} YC \times XN}{\frac{1}{2} AY \times XN} = \frac{YC}{AY} \text{ .... (2)}$$

Karena $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$, maka ΔXBY dan ΔXCY dengan alas $\overline{XY}$ mempunyai tinggi yang sama. Jadi luas ΔXBY dan ΔXCY sama .... (3).

Dari (1), (2) dan (3) dihasilkan:

$$\frac{XB}{AX} = \frac{\text{Luas } \Delta XBY}{\text{Luas } \Delta AXY} = \frac{YC}{AY}, \text{ sehingga } \frac{XB}{AX} = \frac{YC}{AY} \text{ .... (4)}$$

Dengan menambah 1 pada kedua ruas (4) diperoleh:

$$1 + \frac{BX}{AX} = 1 + \frac{YC}{AY} \Leftrightarrow \frac{AX}{AX} + \frac{BX}{AX} = \frac{AY}{AY} + \frac{YC}{AY}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AX + XB}{AX} = \frac{AY + YC}{AY}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC} \text{ (terbukti)}$$

Konvers dari teorema di atas juga benar, yaitu bahwa:

Jika dalam ΔABC ada garis memotong AB di X dan AC di Y sedemikian sehingga $\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC}$, maka $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ (buktikan sendiri).

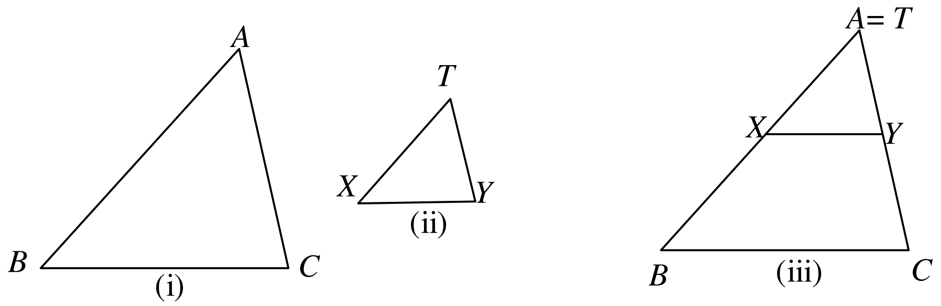
b. Kesebangunan Segitiga

Ketentuan kesebangunan dua segitiga adalah dipenuhinya salah satu dari yang berikut ini.

1) Dua buah segitiga sebangun jika ketiga sudutnya sama besar.

   Penjelasan:

   Karena ketiga sudutnya sama besar, maka kedua segitiga pada Gambar 4.14 (i) dan (ii) dapat disusun seperti Gambar 4.14. (iii) sebagai berikut.



Gambar 4.14

   Karena $u\angle TXY = u\angle ABC$ (sudut sehadap sama besar) maka $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$. Berdasar teorema yang telah dibuktikan di atas, maka $\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC}$. Dengan menempatkan misalnya sudut X berimpit dengan sudut B maka analog dapat Anda pahami bahwa $\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC} = \frac{XY}{BC}$

   Dari kesamaan pasangan sudut dan kesebandingan tersebut, maka ΔTXY dan ΔABC sebangun ($\Delta TXY \sim \Delta ABC$)

   Jadi:

2) Dua segitiga sebangun jika dua sisi seletak sebanding dan sudut apitnya sama besar.

   Jika dua pasang sudutnya sama besar, maka tentu saja sudut ketiga yang merupakan pelurus jumlah kedua sudut pertama juga sama besar. Karena kesebangunan dua segitiga dapat disyaratkan dengan keduanya memiliki dua pasang sudut yang sama besar. Jadi:

3) Dua buah segitiga sebangun jika dua sudut seletaknya sama besar.

4) Dari penjelasan di atas dapat pula disimpulkan bahwa, dua segitiga sebangun jika panjang dua sisi seletak/bersesuaian sebanding dan sudut apitnya sama besar

Penjelasan 3) dan Gambar 4.14 di atas juga memberikan gambaran, bahwa jika ketiga sisi sebanding, maka ketiga sudutnya pun sepasang-sepasang sama besar. Dengan kata lain, kedua segitiga sebangun menurut 1). Jadi dapat diperoleh:

5) Dua buah segitiga sebangun jika panjang ketiga sisi seletak sebanding.

Catatan:

1. Konvers dari pernyataan-pernyataan kesebangunan di atas tetap berlaku.
2. Dalam membandingkan dua sisi seletak/bersesuaian, salah satu caranya adalah jika segitiganya sembarang, maka yang sisi terpanjang yang satu dibandingkan sisi terpanjang segitiga lainnya, yang terpendek dengan terpendek pada segitiga lainnya. Demikian juga sisi yang panjangnya di antara keduanya.
3. Sudut yang bersesuaian terletak di hadapan sisi yang bersesuaian.
4. Dalam membandingkan, pemberian nama dua segitiga disesuaikan. Misalnya $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, maka: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

Contoh 1

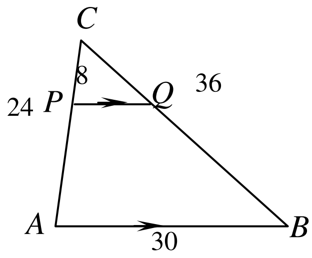
Dari ΔABC diketahui AB = 6 cm, BC = 8 cm dan AC = 9 cm. Jika diketahui bahwa $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ dan QR = 20 cm, hitung panjang sisi-sisi ΔPQR *lainnya.*

Penyelesaian: $\Delta PQR \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{PR}{AC} \Rightarrow \frac{PQ}{6} = \frac{20}{8} = \frac{PR}{9}$

$\Rightarrow \frac{PQ}{6} = \frac{20}{8}$ dan $\frac{20}{8} = \frac{PR}{9}$, sehingga PQ = 15 cm dan 22,5 cm

Contoh 2

Diketahui ΔABC, AC = 24 cm, BC = 36 cm. dan AB = 30 cm. Titik P pada $\overline{AC}$ dan Q pada $\overline{BC}$ dan $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ dan CP = 8 cm. Hitunglah PQ dan QB.



Gambar 4.15

Penyelesaian:

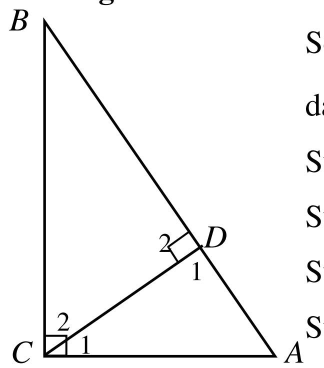
$\overline{PQ} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \angle CPQ = \angle CAB$, dan $\angle CQP = \angle CBA$. Bersama dengan sudut C sebagai sudut sekutu antara ΔCPQ dan ΔCAB, maka $\Delta CPQ \sim \Delta CAB$.

Berarti: $\frac{CP}{CA} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{8}{24} = \frac{CQ}{36} = \frac{PQ}{30}$

Diperoleh. $\frac{8}{24} = \frac{PQ}{30} \Leftrightarrow PQ = 10$ cm

dan $\frac{8}{24} = \frac{CQ}{36} \Leftrightarrow CQ = 12$ cm, sehingga $QB = 36$ cm $-$ 12 cm = 24 cm.

c. Kesebangunan dalam Sebuah Segitiga Siku-siku



Gambar 4.16

Segitiga ABC adalah sebuah segitiga siku-siku di C dan $\overline{CD}$ garis tinggi.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sudut } C_1 \text{ adalah penyiku sudut } A. \\ \text{Sudut } B \text{ adalah penyiku sudut } A.\end{array}\right\} u\angle C_1 = u\angle B$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sudut } C_2 \text{ adalah penyiku sudut } B. \\ \text{Sudut } A \text{ adalah penyiku sudut } B.\end{array}\right\} u\angle C_2 = u\angle A$$

Perhatikan ΔACD dan ΔABC:

$$\left.\begin{array}{l} u\angle A = u\angle A, \\ u\angle C_1 = u\angle B \\ u\angle D_1 = u\angle C \end{array}\right\} \Delta ACD \sim \Delta ABC \text{ .... (1)}$$

Akibatnya $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC}$.

Dari $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow \boldsymbol{AC^2 = AB \times AD}$

Perhatikan ΔACD dan ΔCBD:

$$\left.\begin{array}{l} u\angle A = u\angle C_2, \\ u\angle C_1 = u\angle B \\ u\angle D_1 = u\angle D_2 \end{array}\right\} \Delta ACD \sim \Delta CBD \text{......... (2)}$$

Akibatnya $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$.

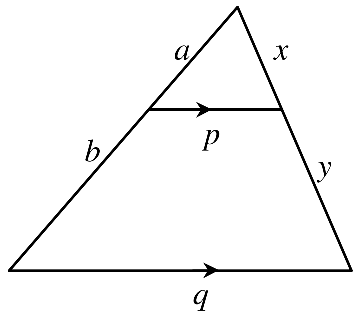
Dari $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$ diperoleh $\boldsymbol{CD^2 = AD \times BD}$.

Dari (1) dan (2) diperoleh $\Delta ACD \sim \Delta ABC \sim \Delta CBD$, dan dengan demikian maka dari $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ diperoleh: $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{BC}{BD}$

Dari $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BC}{BD}$ diperoleh $\boldsymbol{BC^2 = AB \times BD}$

Latihan 3

1. Perhatikanlah gambar di bawah ini.



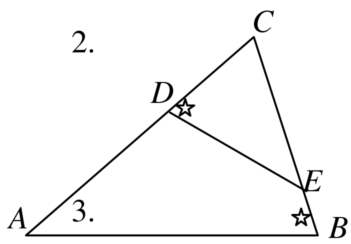
Sebuah ruas garis memotong dua sisi segitiga dan sejajar dengan sisi ketiga. Buktikan:

a. $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{a}{a+b}$

b. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$

c. Perbandingan luas segitiga kecil **:** Luas segitiga besar = a^2 **:** $(a+b)^2$

2.

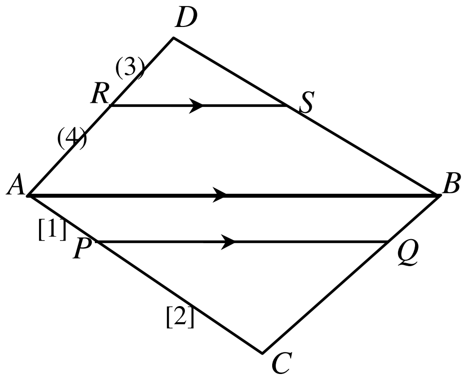


$\overline{DE}$ adalah ruas garis anti paralel terhadap sisi $\overline{AB}$ dalam ΔABC. Jika $AB = 16$ cm, $CE = 9$ cm dan $DE = 6$ cm,

a. segitiga-segitiga manakah yang sebangun?

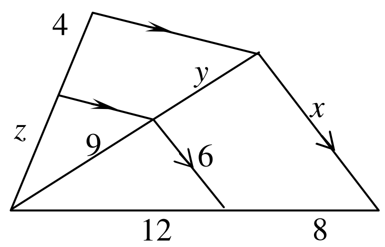
b. sisi segitiga ABC manakah yang dapat dihitung panjangnya? Berapa cm?

3. Pada gambar di samping, $\overline{PQ} \parallel \overline{RS} \parallel \overline{AB}$ dengan $DR : RA = 3 : 4$ dan $AP : PB = 1 : 2$. Tentukan dengan penjelasan selengkapnya cara menentukan nilai perbandingan $PQ : RS$

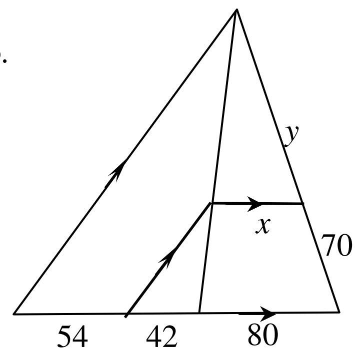


4. Tentukan nilai-nilai panjang ruas garis yang dilambangkan dengan variabel x, y, atau z pada gambar-gambar berikut.

a.



b.



5. Dalam ΔABC, $\overline{AD}$ dan $\overline{BE}$ adalah garis-garis tinggi dan keduanya berpotongan di titik T. Buktikan bahwa: $TA \times TD = TB \times TE$.

6. Segitiga PQR siku-siku di P, $\overline{PS}$ adalah garis tinggi dari P. Buktikan:

   a. $PS^2 = RS \times QS$,

   b. $PQ2 = QR \times QS$, dan

   c. $PR2 = QR \times RS$.

7. Diketahui ΔABC siku-siku di B, $AB = 16$ cm dan $BC = 12$ cm. $\overline{BD}$ adalah garis tinggi dari titik sudut B.

   a. Buktikanlah bahwa: 1) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ dan 2) $\Delta BDA \sim \Delta CBA$

   b. Buktikan bahwa $BD^2 = AD \times DC$.

   c. Hitunglah BE.

8. Dalam ΔABC, $u\angle A = 90^o$ dan $\overline{AD}$ garis tinggi. Jika BC = 16 cm, BD = 8 cm, hitunglah:

   a. panjang $\overline{AB}$

   b. panjang $\overline{AD}$

9. Dalam ΔDEF, $u\angle D = 90°$ dan $\overline{DT}$ adalah garis tinggi. Jika diketahui bahwa .DT = 24 cm, dan FT = 32 cm, hitunglah

   a. panjang $\overline{ET}$

   b. panjang $\overline{DF}$.

10. $\overline{AB}$ adalah diameter pada sebuah lingkaran. Talibusur $\overline{CD}$ memotong tegaklurus $\overline{AB}$ di E. Buktikanlah bahwa $CE^2 = AE \times BE$.

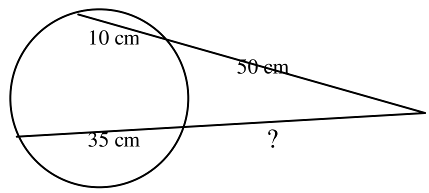
4. KEGIATAN BELAJAR 4: Menggunakan Konsep Kesebangunan Segitiga dalam Pemecahan Masalah

Masalah 1

Sebuah pohon pada siang hari yang cerah mempunyai bayang-bayang sepanjang 12 m. Pada saat yang sama, sebuah pensil sepanjang 15 cm yang diletakkan tegak bayang-bayangnya sepanjang 9 cm. Berapa tinggi pohon?

Masalah 2

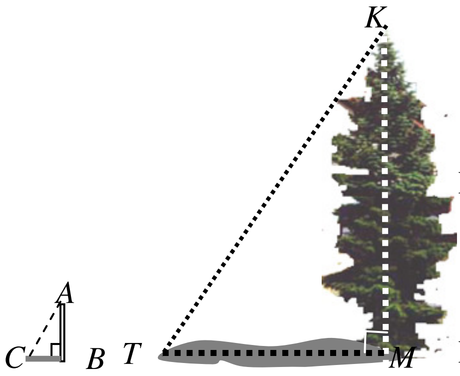
Pada gambar berikut ini, bagaimana Anda menentukan panjang ruas garis yang bertanda tanya?



Gambar 4.17

Kesebangunan dua segitiga dan hal yang terkait dengannya merupakan salah satu alat yang dapat digunakan dalam memecahkan masalah yang berhubungan dengan panjang ruas garis. Kesebangunan juga sering terkait dengan skala gambar. Jika dalam masalahnya tidak segera muncul adanya unsur-unsur kesebangunan, maka garis-garis pertolongan sering membantu dalam menyelesaikan masalah geometri.

Contoh 1



Gambar 4.18

Perhatikan Masalah 1 dalam KB 4 ini. Situasinya dapat digambarkan dan disederhanakan sebagai berikut:

Pensil: $AB = 15$ mm

$BC = 9$ mm

$u\angle B = 90°$

Pohon: $KM = ...?$

$MT = 12$ m

$u\angle M = 90°$

ΔABC yang menggambarkan situasi terkait pensil dan bayang-bayangnya dan ΔKMT yang menggambarkan situasi terkait pohon dan bayang-bayangnya, adalah dua segitiga sebangun.

$$\frac{KM}{AB} = \frac{MT}{BC} \Rightarrow \frac{KM}{15} = \frac{12}{9} \Leftrightarrow KM = 20$$

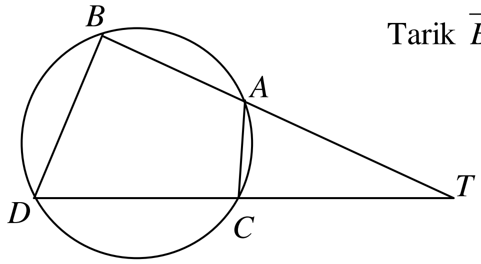
Jadi tinggi pohon 20 m.

Contoh 2

Sebuah titik T berada di luar sebuah lingkaran. Untuk setiap garis g melalui T memotong lingkaran di A dan B dan garis h melalui T memotong lingkaran di C dan D, buktikanlah bahwa:

$$TA \times TB = TC \times TD,$$

Penyelesaian:



Gambar 4.19

Tarik $\overline{BD}$ dan $\overline{AC}$

Segi empat $ABDC$ adalah segi empat tali busur.

$$\left.\begin{array}{l} u\angle BDC + u\angle CAB = 180^\circ \\ u\angle TAC + u\angle CAB = 180^\circ \end{array}\right\} u\angle BDC = u\angle TAC \text{ .... } (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u\angle ABD + u\angle ACD = 180^\circ \\ u\angle TCA + u\angle ACD = 180^\circ \end{array}\right\} u\angle ABD = u\angle TCA \text{ .... } (2)$$

Dari (1), (2) dan $u\angle T = u\angle T$, maka $\Delta TBD \cong \Delta TCA$. Akibatnya:

$$\frac{TB}{TC} = \frac{TD}{TA} \Leftrightarrow TA \times TB = TC \times TD.$$

Karena kedua arah garis tidak ditentukan (diambil garis g dan h sebarang), berarti di mana pun titik potong garis melalui T terhadap lingkaran tersebut, hubungan perkalian panjang ruas garis dari T ke titik-titik potong garis dengan lingkaran, nilainya tidak berubah. Hasil kali ini yang nilainya tidak berubah ini disebut **kuasa titik *T*** terhadap lingkaran tersebut.

Contoh 3

Dari Masalah 2 pada KB 4 ini jika panjang ruas garis bertanda ”?” dilambangkan x, maka berdasar uraian pada Contoh 2 di atas diperoleh:

$$50 \times (50 + 10) = x \times (x + 35)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3000 = x(x + 35)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 40$$

Panjang ruas garis bertanda ”?” adalah 40 satuan.

Latihan 4

1. Diagonal-diagonal trapesium $ABCD$ berpotongan di titik T. Buktikanlah bahwa:

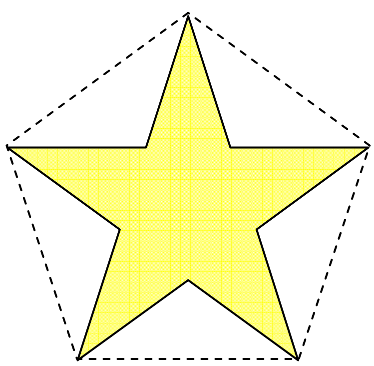
   $TA \times TD = TB \times TC.$

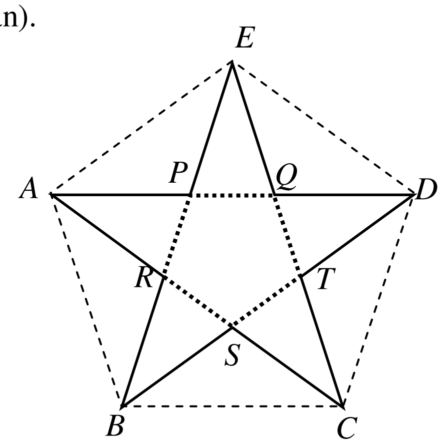
2. Sebuah titik T berada di dalam sebuah lingkaran. Garis g melalui T memotong lingkaran di A dan B. Garis h melalui T memotong lingkaran di C dan D. Buktikanlah bahwa: $TA \times TB = TC \times TD$. (Bandingkanlah dengan Contoh 2 KB 4).

3. T adalah sebuah titik di luar sebuah lingkaran berjarak p dari pusat lingkaran Jika dibuat garis singgung melalui T menyinggung lingkaran di S, jelaskan bahwa kuasa T terhadap lingkaran sama dengan $TS^2 = (p + r)(p - r)$.

4. Dua tiang masing-masing berukuran 3 m dan 7 m berdiri tegak di atas tanah. Puncak tiang pertama dihubungkan dengan kaki tiang kedua menggunakan seutas tali. Puncak tiang kedua dihubungkan dengan kaki tiang pertama menggunakan seutas tali. Tentukan ketinggian titik potong kedua tali dari permukaan tanah.

5. Perhatikanlah " bintang segi-5 beraturan" (titik-titik sudutnya bersekutu dengan titik sudut segilima). Dengan warna keemasan, bintang segi-5 adalah lambang Ketuhanan Yang Maha Esa (dalam masa lampau digunakan sebagai lambang kedewaan).



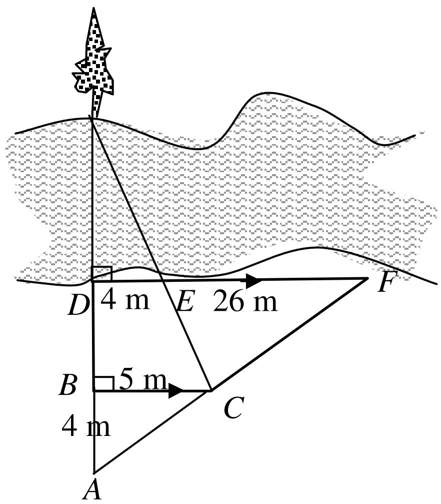


Buktikanlah bahwa: $\dfrac{AD}{AQ} = \dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{AP}{BQ}$.

Catatan:

Nilai perbandingan tersebut merupakan konstanta untuk setiap segilima bintang. Kontanta tersebut dilambangkan dengan φ (phi) dengan $\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \approx 1{,}618033989$ dan disebut bilangan keemasan (golden number). Perbandingannya dikenal sebagai perbandingan keemasan (*golden ratio*).

6. Berapa lebar sungai jika situasi pengamatannya digambarkan seperti di bawah ini?



BAB V
PENUTUP

A. Rangkuman

Setelah Anda mempelajari dan memahami semua KB dalam modul ini maka Anda semestinya dapat menyimpulkan konsep-konsep atau aturan-aturan kunci dalam keseluruhan tema pembelajaran modul ini. Berikut ini salah satu cara menyimpulkan apa yang telah dipelajari sebelumnya dalam bentuk ikhtisar atau rangkuman.

1. Teorema Pythagoras:

   "Pada sebarang segitiga siku-siku, kuadrat panjang sisi miring (hipotenusa) sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi-sisi yang lain"
   atau,
   "Jika segitiga *ABC* dengan *C* sudut siku-siku dan *a, b, c* berturut-turut panjang sisi di depan sudut *A*, *B*, dan *C* maka berlaku $a^2 + b^2 = c^2$ "

   Rumus Pythagoras adalah kesamaan: $a^2 + b^2 = c^2$.

2. Rangkaian tiga bilangan asli yang memenuhi Rumus Pythagoras disebut Tripel Pythagoras. Jika (*a, b,* c) adalah Tripel Pythagoras maka $a^2 + b^2 = c^2$.

   Salah satu rumus Tripel Pythagoras (*a, b,* c): $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ dan $c = m^2 + n^2$ dengan $m > n$.

3. Banyak bukti untuk Teorema Pythagoras, antara bukti dengan diagram, dengan bantuan rumus luas, atau dengan pemotongan. Contohnya bukti dari Pythagoras, Garfield, Bhaskara, dll.

4. Kebalikan Teorema Pythagoras dapat dinyatakan sebagai berikut:

   "Pada sebarang segitiga *ABC,* bila $a^2 + b^2 = c^2$ maka sudut *C* siku-siku".

5. Unsur lingkaran dan unsur daerah lingkaran, antara lain: pusat lingkaran, jari-jari, diameter, busur lingkaran (busur kecil, setengah lingkaran, busur besar), tali busur, anak panah, apotema, sudut pusat, sudut keliling, juring atau sektor, temberang atau segmen lingkaran.

6. Keliling lingkara (K), $K = \pi d$ atau $K = 2\pi r$, dengan d = diameter, r = jari-jari, dan π = 3,14159265358979323846264338327950 .... dengan pendekatan 3,14 atau $\frac{22}{7}$.

   Luas lingkaran, $L = \pi r^2$

7. Perbandingan sudut pusat busur sama dengan perbandingan panjang busurnya juga sama dengan perbandingan luas juring yang dibentuk masing-masing busur.

8. Dalam sebuah lingkaran, besar sudut pusat = 2 × besar sudut keliling yang menghadap busur yang sama dalam lingkaran tersebut.

9. Jika dua buah lingkaran tidak saling tumpang tindih (beririsan) maka memiliki dua jenis garis-garis singgung persekutuan: garis singgung persekutuan dalam, serta garis singgung persekutuan luar. Cara menghitung panjang garis singgung persekutuan adalah dengan menggunakan Rumus Pythagoras.

10. Lingkaran dalam suatu segitiga adalah lingkaran yang menyinggung semua sisi segitiga. Untuk melukis lingkaran dalam pada suatu segitiga maka diperlukan titik pusat lingkaran tersebut yang merupakan titik potong garis-garis bagi (sudut) segitiga.

11. Lingkaan luar suatu segitiga adalah lingkaran yang melalui ketiga titik sudut segitiga. Untuk melukis lingkaran luar pada suatu segitiga maka diperlukan

titik pusat lingkaran tersebut yang merupakan titik potong sumbu-sumbu sisi segitiga.

12. Dua buah bangun datar kongruen jika keduanya mempunyai bentuk dan ukuran yang sama. Kesamaan ukuran tersebut dapat dinyatakan dengan:
    (1) setiap pasang sisi seletak sama panjang, dan
    (2) setiap pasang sudut seletak sama besar.

13. Setiap dua bangun, yang **tepat** dapat saling menempati bangun lainnya merupakan pasangan bangun yang kongruen.

14. Jika dua buah gambar bangun datar yang bentuknya sama, tanpa harus memperhatikan ukurannya sama atau pun tidak, dikatakan sebangun. Yang dimaksud bentuk di sini berkaitan dengan pemodelan, di mana bentuk yang satu dapat diperoleh dari bentuk lainnya dengan skala tertentu

15. Dari kaitannya dengan skala tersebut maka pada setiap pasang bangun sebangun,
    - semua pasang sisi seletak sebanding, dan
    - setiap pasang sudut seletak sama besar.

16. Dua buah segitiga kongruen jika salah satu dari kondisi berikut ini dipenuhi:
    a. setiap pasang dari ketiga pasang sisi seletak sama panjang (*s*, *s*, *s*).
    b. setiap pasang dari dua pasang sisi seletak sama panjang dan sudut apitnya sama besar. (*s*, *sd*, *s*)
    c. satu pasang sisinya sama panjang dan setiap pasang dari kedua sudut yang berkaki sudut sisi tersebut sama besar. (*sd*, *s*, *sd*)
    d. setiap pasang dari dua sudutnya sama besar dan panjang sisi di hadapan salah satu sudutnya sama besar. (*sd*, *sd*, *s*)

17. Ketentuan kesebangunan dua segitiga adalah dipenuhinya salah satu dari yang berikut ini.
    a. Dua buah segitiga sebangun jika ketiga sudutnya sama besar.
    b. Dua segitiga sebangun jika dua sisi seletak sebanding dan sudut apitnya sama besar.
    c. Dua buah segitiga sebangun jika dua sudut seletaknya sama besar.
    d. Dua segitiga sebangun jika panjang dua sisi seletak/bersesuaian sebanding dan sudut apitnya sama besar.
    e. Dua buah segitiga sebangun jika panjang ketiga sisi seletak sebanding.

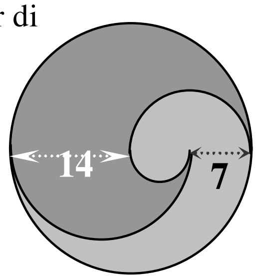
18. Kesebangunan dua segitiga dan yang terkait dengannya merupakan salah satu alat yang dapat digunakan dalam memecahkan masalah yang berhubungan dengan panjang ruas garis. Kesebangunan juga sering terkait dengan skala gambar. Jika dalam masalahnya tidak segera muncul adanya unsur-unsur kesebangunan, maka garis-garis pertolongan sering membantu dalam menyelesaikan masalah geometri.

B. Tes

1. Menurut Anda apakah proposisi di bawah ini sebuah versi Teorema Pythagoras?

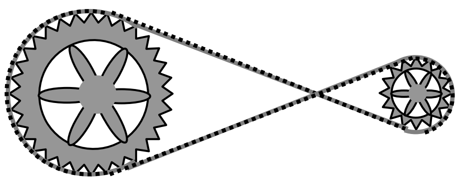
    "*Pada suatu segitiga siku-siku maka luas persegi pada sisi miring sama dengan jumlah luas persegi pada sisi-sisi penyiku*".
2. Carilah Tripel Pythagoras dengan salah satu bilangannya 11.
3. Bandingkan bukti dari Garfield dan bukti dengan menggunakan rumus luas dari salah satu diagram Pythagoras. Mana yang lebih efisien? Mengapa?
4. Apa hubungan Kebalikan Teorema Pythagoras dengan Tripel Pyhagoras?
5. Suatu busur $\overset{\frown}{AB}$ dalam lingkaran berpusat di P berada di hadapan sudut pusat $APB = \alpha$. Jenis sudut apakah sudut α tersebut jika busurnya adalah busur besar?

6. Kurva pembatas bagian daerah lingkaran pada gambar di samping masing-masing merupakan lingkaran atau setengah lingkaran. Hitunglah luas setiap bagian lingkaran dengan warna arsiran berbeda tersebut.



7. Sebuah talibusur lingkaran panjangnya 112 mm, berjarak 33 mm dari pusat lingkaran tersebut. Berapa panjang talibusur jaraknya 16 mm dari pusat lingkaran?

8. Dua buah roda berjari-jari masing-masing 42 cm dan 14 cm, kedua as-nya berjarak 112 cm. Pada keduanya dipasangi rantai seperti tampak pada gambar di samping. Berapa sentimeter panjang rantai yang tepat terpasang pada kedudukan tersebut?

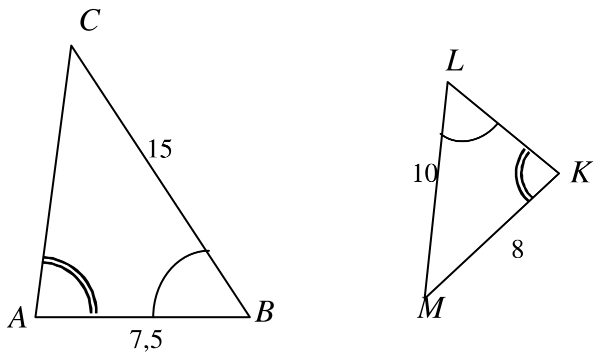


9. Panjang sisi-sisi sebuah segitiga berturut-turut 26 mm, 28 mm, dan 30 mm. Lukislah segitiga dan lingkaran dalamnya. Berapa panjang jari-jari lingkaran dalamnya?

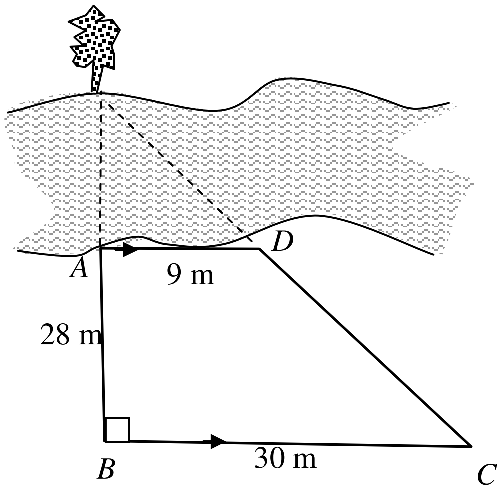
10. Sebuah segienam panjang setiap sisinya a satuan. Sebuah segienam lain panjang setiap sisinya juga a satuan. Apakah keduanya kongruen? Apakah keduanya sebangun? Berikan penjelasan.

11. Diketahui ΔABC, $u\angle A = u\angle B$. Buktikanlah bahwa segitiga ABC samakaki.

12. Pada gambar di samping, hitunglah panjang sisi-sisi segitiga yang belum diketahui.



13. Seseorang ingin mengukur secara tidak langsung lebar sebuah sungai. Dipasangnya sebuah patok (namakan titik *A*), kemudian ditarik tali-tali seperti tampak pada gambar di samping. Berapa lebar sungai di bagian yang diamatinya?



C. Petunjuk Penilaian Tes

Keberhasilan Anda memahami modul ini dapat Anda ukur sendiri dengan indikator banyak soal yang dapat Anda temukan solusinya.

Banyak soal yang dapat ditemukan solusinya	Nilai Anda
Kurang dari 8 soal	Belum berhasil
8 hingga 10 soal	Cukup berhasil
11 hingga 12 soal	Berhasil
13	Sempurna

Catatan: kriteria suatu soal dapat ditemukan solusinya, minimal telah sesuai cara penyelesainnya, walaupun terdapat kesalahan hitung yang bukan kesalahan konseptual.

DAFTAR PUSTAKA

Clemens, S.R., O'Daffer, P.G., and Cooney, T.J. *Geometry with Applications and Problem Solving*. Menlo Park: Addison-Wesley Publishing Company

Depdiknas 2003. *Pendekatan Kontekstual. (Contextual Teaching and Learning (CTL))*. Jakarta: Direktorat PLP.

Hall. H.S. MA dan Stevens, FH, MA. 1949. *School Geometry Parts I – VI*. London: Macmillan and Co. Limited

Krismanto, 1999. *Pengubinan*. Naskah belum dipublikasikan

Sparks, John. 2008. *The Pythagorean Theorem, Crown Jewel of Mathematics*. Indiana (USA): AuthorHouse.

Sumardyono. 2004. *Beberapa Alternatif Bukti Teorema Pythagoras*. dalam Buletin LIMAS, edisi 013, Desember 2004, halaman 11-15. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Travers, *K*.J., Dalton, L.C., anda Layton, *K*.P. 1987. *Geometry*. River Forest, Illinois: Laidlaw Brothers Publisher.

Wilson, JW. 2003. *Contextual Teaching And Learning*. http://jwilson.coe.uga.edu/CTL/CTL/intro/ctl_is.html#other **The Department of Mathematics Education EMAT 4600/6600.** Diakses 10 September 2004

Winarno, 2003. *Geometri Datar SMP*. Makalah dalam Pelatihan Guru Matematika SMP. Yogyakarta: PPPG Matematika.

LAMPIRAN 1
DAFTAR SIMBOL

LAMIPIRAN 1: DAFTAR SIMBOL

Lambang	membaca/artinya
$n \in N$	n anggota himpunan bilangan asli (N = himpunan bilangan asli)
$\parallel$	sejajar
$\nparallel$	tidak sejajar
#	sama dan sejajar
$\perp$	tegaklurus
$\overline{AB}$	ruas garis AB
$\overrightarrow{AB}$	sinar AB
$\overleftrightarrow{AB}$	garis AB (panjang tak berhingga)
AB	panjang $\overline{AB}$; AB = 2 cm, maksudnya panjang ruas garis AB 2 cm.
$\angle BAC$	sudut BAC
$u\angle BAC$ $u\angle A$	ukuran (besar) sudut BAC ukuran (besar) sudut A
ΔABC	segitiga ABC
$\neq$	tidak sama dengan
$\cong$	kongruen
$\sim$	sebangun

LAMPIRAN 2
KUNCI JAWABAN LATIHAN TIAP KEGIATAN BELAJAR

LAMPIRAN 2: KUNCI JAWABAN LATIHAN TIAP KEGIATAN BELAJAR

BAB II, Latihan 1

1. (bandingkan dengan bermacam versi pernyataan Teorema Pythagoras yang telah dibahas)

2. Sesungguhnya tidak ada pilihan terbaik, oleh karena pernyataan Teorema Pythagoras baik secara geometris maupun aljabar, bergantung pada kemampuan dan gaya belajar siswa. Oleh karena itu, ada baiknya bila kedua versi tersebut disajikan agar siswa mendapat gambaran yang lebih komprehensif dan tepat mengenai Teorema Pythagoras. Akan lebih baik lagi bila disertakan lembar peraga berupa gambar sehingga siswa terbantu secara visual.

BAB II, Latihan 2

1. $10 \times (7,24,25) =$ **(70,240,250)**

   $14 \times (3,4,5) =$ **(42,56,70)**

   $14 \times (5,12,13) =$ **(70,168,182)**

   $2m = 70$ maka $m = 35$ sehingga $m^2 - 1 = 1224$ dan $m^2 + 1 = 1226$

   Diperoleh Tripel Pythagoras **(70,1224,1226)**

   $m^2 - 1 = 35$ maka $m = 6$ sehingga $m^2 + 1 = 37$ dan $2m = 12$

   Diperoleh Tripel Pythagoras (12,35,37) yang jika dikali dua diperoleh **(24,70,74)**

   Dan mungkin masih banyak lagi.

2. $a^2 + b^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2$

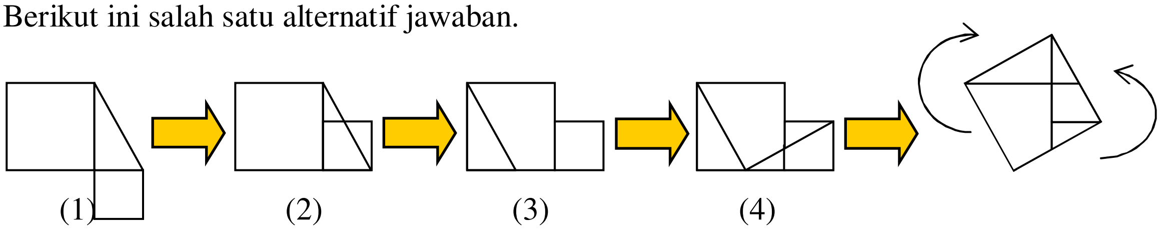
$$= 4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4$$
$$= m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$
$$= (m^2)^2 + 2m^2n^2 + (n^2)^2$$
$$= (m^2 + n^2)^2$$
$$= c^2 \text{ (terbukti)}$$

Jadi, (a,b,c) adalah sebuah Tripel Pythagoras. Bentuk ini lebih umum, dibanding rumus Tripel Pythagoras yang telah dibahas.

Bilangan ketiga, c merupakan panjang **sisi miring** segitiga siku-siku yang bersesuaian.

BAB II, Latihan 3

1. Berikut ini salah satu alternatif jawaban.



(1) (2) (3) (4)

(5)

Pada diagram (1), misalkan segitiga siku-siku itu segitiga ABC dengan panjang sisi miring c dan panjang sisi-sisi yang lain a dan b. Misalkan panjang sisi persegi yang kecil a dan panjang sisi persegi yang besar b, sehingga jumlah luasnya $a^2 + b^2$

Pada diagram (2), persegi yang kecil digeser ke atas. Pergeseran ini tidak mengubah luas daerah.

Pada diagram (3), ruas garis sisi miring digeser ke dalam daerah persegi besar. Pergeseran itu tidak mengubah panjang sisi miring dan arahnya, juga tidak mengubah luas daerah kedua persegi.

Pada diagram (4), dibentuk sebuah ruas garis. Jelas bahwa ruas garis itu panjangnya sama dengan panjang sisi miring segitiga karena merupakan sisi miring dari sebuah segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisi penyiku a dan b.

Kedua ruas garis sisi miring itu pun membentuk sudut siku-siku, karena besarnya sama dengan $180^o - (u\angle A + u\angle B)$ sedang $u\angle A + u\angle B = 90^o$.

($u\angle A$ artinya besar sudut A dalam satuan derajat seksagesimal).

Pada diagram (5), pemotongan tidak mengubah jumlah luas kedua persegi. Akan tetapi susunan potongan sekarang telah membentuk sebuah persegi besar dengan sisi sepanjang c. Mengapa? Ini mudah ditunjukkan dengan mengingat besar sudut A, besar sudut B dan jumlahnya yang siku-siku. Luas persegi yang terbentuk ini adalah c^2.

Karena daerah yang dipotong dan disusun kembali tetap luasnya, maka luas daerah dari diagram (1) dan (5) sama sehingga $a^2 + b^2 = c^2$.

Rangkaian penjelasan di atas *semestinya* muncul dalam pikiran siswa ketika mencermati diagram demi diagram pada diagram pembuktian di atas.

2. Sebaiknya jangan. Memberi bukti termasuk dalam kompetensi dasar dalam pembelajaran matematika. Setiap kali siswa mengerjakan suatu pekerjaan matematika, pertanyaan yang paling layak untuk diajukan bukanlah pertanyaan "benar atau salah?", tetapi "mengapa demikian?", "apa alasannya?". Selain itu jika yang menjadi alasan adalah keterbatasan waktu, tidaklah tepat. Hal ini dikarenakan banyak pilihan bukti yang cukup sederhana sehingga tidak membutuhkan waktu yang lama. Barangkali untuk memahami suatu bukti hanya memerlukan waktu memahami suatu soal latihan saja.

3. Jika memang memungkinkan, sebaiknya disajikan beberapa macam pembuktian (dengan jenis strategi berbeda). Hal ini dikarenakan masing-masing siswa memiliki gaya belajar yang berbeda-beda dan kemampuan intelegensia yang berbeda-beda pula. Ada siswa yang lebih menonjol dalam kecerdasan visual, mungkin pula ada siswa cerdas memanipulasi rumus dan lambang aljabar, atau ada pula siswa lain yang lebih terampil dengan melakukan demonstrasi (kinestetik). Tentu dengan memandang semua ini, Anda seharusnya menyiapkan alat peraga bukti Teorema Pythagoras, juga Lembar Peraga bukti Teorema Pythagoras.

BAB II, Latihan 4

1. Diberikan beberapa pasangan panjang sisi segitiga berikut ini. Mana yang merupakan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku?

   (9, 40,41), (33,56,65), (13,84,85) merupakan Tripel Pythagoras.

   (28,44,50), (11,50,51), (26,67,75) bukan Tripel Pythagoras.

2. Salah satu alternatif jawaban:

   "Jika pada sebarang segitiga diketahui kuadrat panjang sisi terbesar sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi-sisi yang lain maka segitiga itu merupakan segitiga siku-siku dengan sudut siku-siku di hadapan sisi terbesar".

BAB III, Latihan 1

1. Garis dan L_2 melalui ujung busur setengah lingkaran L_1.

2. Lihat No. 1

3. (i) $d > r_1 + r_2$ (ii) $d = r_1 + r_2$ (iii) $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

   (iv) $d = |r_1 - r_2|$ (v) $d < |r_1 - r_2|$ (vi) d = 0

BAB III, Latihan 2

1. 31,83 cm

2. 1515,15 rpm

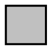
3. 165.

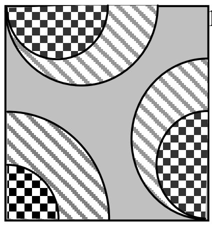
4. 22 kaleng

5. $2\pi - 4$

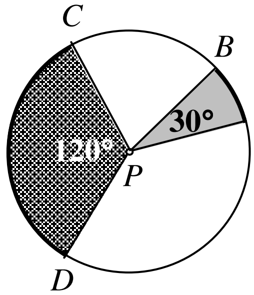
6. Luas arsiran  $= \frac{1}{4} \times \pi \times 10^2 + \pi \times 10^2 = 125\pi$

   Luas arsiran  $= \frac{1}{4} \times \pi \times 20^2 + \pi \times 15^2 - 125\pi = 200\pi$

   Luas arsiran  $= 1600 - (¼ \times \pi \times 20^2 + \pi \times 15^2) = 1600 - 325\pi$



BAB III, Latihan 3



1. a. $AB = BC$

   b. panjang apotema ke $\overline{AB}$ = panjang apotema ke $\overline{BC}$?

2. Panjang busur $\overset{\frown}{AB} = \frac{30}{120} \times 88$ mm = 22 mm

   a. Panjang jari-jari lingkaran = 42 mm

   b. luas juring PCD = 1848 mm^2, luas juring PAB = 462 mm^2

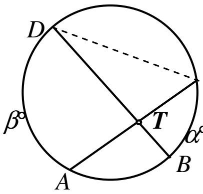
3. a. Jarak P ke $\overline{AB} = \sqrt{R^2 - k^2}$

   b. Jarak P ke $\overline{CD} = \sqrt{R^2 - k^2}$

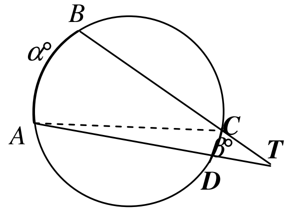
   c. Pada setiap lingkaran, dua talibusur yang panjangnya sama berjarak sama pula dari pusat lingkaran.

4. 30 mm

5. $\angle BTC = \angle BDC + \angle ACD = \frac{1}{2}\alpha° + \frac{1}{2}\beta° = \frac{1}{2}(\alpha° + \beta°)$



6. $\angle ATB = \angle ACB - \angle CAD = \frac{1}{2}\alpha° - \frac{1}{2}\beta° = \frac{1}{2}(\alpha° - \beta°)$

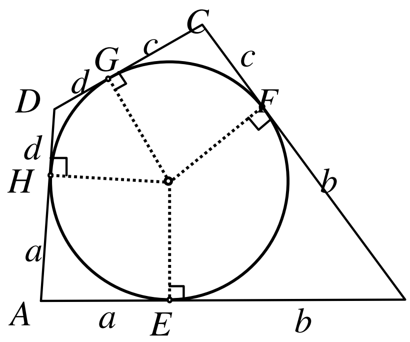


7. $BC = 40$ mm.

BAB III, Latihan 4

1. a. $2160 \dfrac{R}{M} = \dfrac{2160}{60}\dfrac{R}{S} = 36\ RPS$

   b. $\dfrac{1}{4}$ detik berputar $\dfrac{1}{4} \times 36$ kali = 9 rotasi = $9 \times 360° = 3240°$

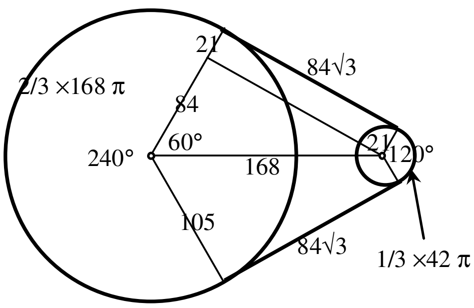


2. a. Jumlah panjang sepasang sisi masing-masing $a + b + c + d$.

   b. Bukti:

$AE \times BE + DG \times CG = ab + cd = AH \times BF + CF \times DH$

$= AH \times BF + DH \times CF$



3. Panjang rantai yang tepat terpasang pada kedudukan tersebut = $(168\sqrt{3} + 126\pi)$ cm.

BAB III, Latihan 5

1. Yang pasti mempunyai lingkaran dalam: a. Persegi dan d. belah ketupat
   Yang pasti mempunyai lingkaran luar: a. persegi, b. persegi panjang, dan c. trapesium sama kaki
2. -
3. –
4. Panjang jari-jari lingkaran luar = 26 mm.
   Panjang jari-jari lingkaran dalam 8 mm

BAB IV, Latihan 1

1. Misalkan panjang sisi-sisi segitiga terkecil berturut-turut *a*, *b*, dan *c* satuan
   a. 2 macam. Ada 9 berukuran *a*, *b*, dan *c* satuan, dan 4 buah berukuran 2*a*, 2*b*, dan 2*c* satuan

   b. Ada 3 macam jajargenjang kongruen
      1) 3 jajargenjang kongruen berukuran panjang sisi *a* dan *b*.
      2) 3 jajargenjang kongruen berukuran panjang sisi *a* dan *c*.
      3) 3 jajargenjang kongruen berukuran panjang sisi *b* dan *c*

   c. Ada 3 macam trapesium kongruen
      1) 4 trapesium kongruen berukuran panjang sisi sejajar *a* dan 2*a*.
      2) 4 trapesium kongruen berukuran panjang sisi sejajar *b* dan 2*b*.
      3) 4 trapesium kongruen berukuran panjang sisi sejajar *c* dan 2*c*

2. Identifikasi bangun-bangun sebangun dan bangun-bangun kongruen dalam setiap gambar atau bagian gambar a - d. Berikut beberapa contoh:
   a. Model bangun kongruen persegi □, dan persegi yang memuat 4 persegi pertama dan model persegi panjang yang memuat dua persegi terkecil. Kedua model merupakan model sebangun.
   b. Model segi lima yang kongruen.
      Model segi enam kongruen yang memuat 2 segi lima
      Model segi delapan kongruen yang memuat 4 persegi terkecil dan 8 segi lima.
   c. Model segi enam beraturan kongruen, model segi enam beraturana kongruen yang memuat segi enam beraturan terkecil dan 18 segitiga sama sisi kongruen (dan masih banyak lagi)
   d. Model-model kongruen: segi enam beraturan, segitiga sama sisi, belah ketupat, dan sebagainya.
   e. Model-model kongruen: segitiga sama sisi, persegi, segi enam beraturan (dan gabungannya)

3. a. Tidak semua segitiga samakaki sebangun karena perbedaan sudut puncak yang mengakibatkan perbedaan pula perbedaan pada sudut alasnya.
   b. Semua segitiga sama sisi sebangun karena berapa pun juga ukuran panjang sisi-sisinya, setiap sudut besarnya 60°.

4. Gambar pertama mempunyai banyak pasangan ”ikan” kongruen, satu menghadap ke kiri, lainnya ke kanan. Mereka pun sebagian besar sebangun yang satu dengan lainnya

   Gambar kedua seperti juga pada gambar pertama. Kongruensi dan similaritas (kesebangunan) terjadi dengan arah berbeda.

BAB IV, Latihan 2

1. Petunjuk: Tarik $\overline{TA}$ dan $\overline{TB}$. Terjadi dua segitiga kongruen (*ss*, *sd*, *ss*)
2. Petunjuk: Buktikan dulu $\Delta PRB \cong \Delta QRA$ dengan mengingat kesamaan pelurus sudut P dan Q.
3. Perhatikan adanya kongruensi dari dua segitiga dengan sudut siku-siku dan sudut alas yang sama.
4. Buktikanlah dulu kongruennya segitiga bersisi sekutu $\overline{PD}$.
5. (konvers No. 5; cara serupa)
6. Perhatikan kongruensi segitiga karena adanya tiga pasang sisi sepasang-sepasang sama.
7. -

BAB IV, Latihan 3

1. Gunakan sifat dua garis sejajar yang dipotong garis ketiga, sudut sehadap sama besar $\rightarrow \angle KRS = \angle KLM$ dan $\angle KSR = \angle KML$.

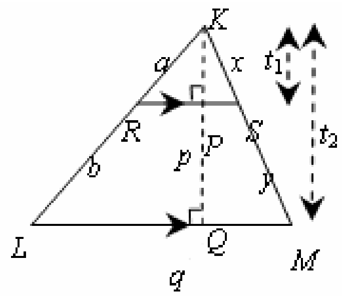
   $\angle K = \angle K$ (sekutu), maka $\Delta KRS \sim \Delta \angle KLM$

   a. $\dfrac{KS}{KM} = \dfrac{RS}{LM} = \dfrac{KR}{KL} = \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+y} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{a}{a+b}$

   b. $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{a}{a+b} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{x} = \dfrac{a+b}{a}$

   $\Leftrightarrow 1 + \dfrac{y}{x} = 1 + \dfrac{b}{a}$

   $\Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$



c. Analog: $\Delta KRP \sim \Delta\angle KLQ \Rightarrow$ Dari bukti pada butir a diperoleh: $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{a}{a+b}$

$$\frac{\text{Luas } \Delta KRS}{\text{Luas } \Delta KLM} = \frac{\frac{1}{2}pt_1}{\frac{1}{2}qt_2} = \frac{p}{q}\times\frac{t_1}{t_2} = \frac{a}{a+b}\times\frac{a}{a+b} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

Perbandingan luas segitiga kecil **:** Luas segitiga seluruhnya = a^2 **:** $(a + b)^2$

2. a. $\Delta CDE \sim \Delta CBA$; b. AC, panjangnya 24 cm.
3. PQ **:** RS = 14 : 9
4. a. $x = 10$; $y = 6$. $z = 6$ b. $x = 45$, $y = 90$
5. Perhatikan adanya segi empat talibusur
6. Petunjuk: lihat uraian pada KB 3 butir c.
7. a. (buktikan sendiri; kesamaan pada sudut siku-siku dan adanya sudut sekutu/penyiku)

   b. Buktikan dulu $\Delta BDA \sim \Delta CDB \Rightarrow BD : CD = DA : DB \Rightarrow BD^2 = AD \times DC$.

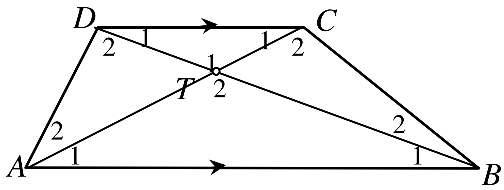
   c. BE = 9,6 cm
8. a. $AB = 8\sqrt{2}$ cm, b. AD = 8 cm :
9. a. ET = 24 cm, b. DF = 40 cm
10. Petunjuk: Lihat No. 6.

BAB IV, Latihan 4

1. $\overline{DC} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \angle A_1 = \angle C_1$; $\angle B_1 = \angle D_1$; sedangkan $\angle T_2 = \angle T_1$

   Akibat: $\Delta TAB \sim \Delta TCD \Rightarrow \dfrac{TA}{TC} = \dfrac{TB}{TD}$

   $\Leftrightarrow TA \times TD = TB \times TC$



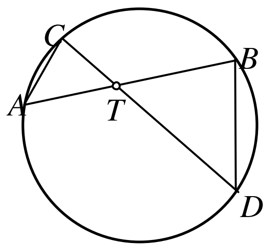
2. Tarik $\overline{AC}$ dan $\overline{BD} \Rightarrow$

   $\angle TAC = \angle TDB$ (menghadap busur $\overset{\frown}{BC}$)

   $\angle$TCA= $\angle TDB$ (menghadap busur $\overset{\frown}{AD}$)

   $\angle$CTA = $\angle BTD$ (bertolak belakang)

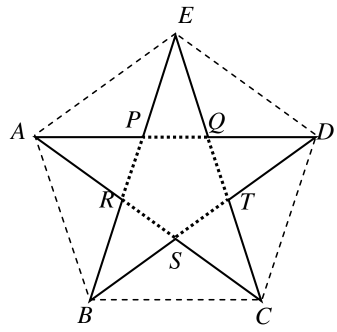
   Akibat: $\Delta TAC = \Delta TDB$ sehingga $\dfrac{TA}{TC} = \dfrac{TD}{TB} \Leftrightarrow TA \times TB = TC \times TD$



3. Perhatikan Contoh 2 KB 4 dan jawaban No. 2 di atas.

4. 2,1 m.

5. Perhatikanlah bahwa besar ketiga sudut pada setiap titik sudut A, B, C, D, dan E, masing-masing 36°. Perhatikan pula semua segitiga yang terbentuk adalah segitiga sama kaki dan beberapa pasang di antaranya segitiga sebangun dan ada yang kongruen.

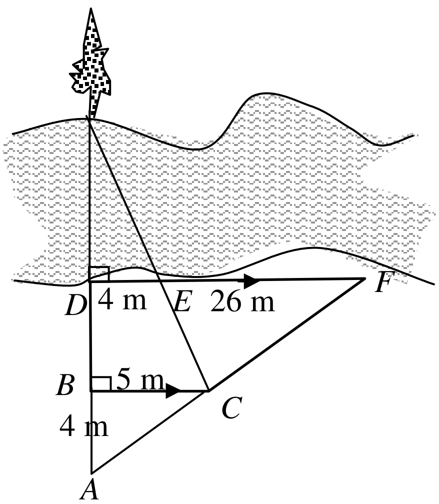


$\Delta ADE \sim \Delta AEP \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AP}$, sedangkan $AQ = AE$ (segitiga bersudut 72°, 72°, dan 36°) sehingga $\frac{AD}{AQ} = \frac{AQ}{AP}$ (lanjutkan sendiri untuk $= \frac{AP}{BQ}$)

6. Namakan kaki pohon di seberang titik T, maka

$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DF} \Rightarrow \frac{4}{4+BD} = \frac{5}{30}$

$\Leftrightarrow 120 = 20 + 5BD \Leftrightarrow BD = 20$



Perhatikan ΔTBC.

ΔTBC: $\frac{TD}{TB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{TD}{TD+20} = \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow 5TD = 4TD + 80$

$\Leftrightarrow TD = 80$

Lebar sungai adalah 80 m.

LAMPIRAN 3

KUNCI ATAU PETUNJUK JAWABAN TES

LAMPIRAN 3: KUNCI ATAU PETUNJUK JAWABAN TES

1. Kesalahan terbesar adalah penggunaan kata “suatu“ yang benar seharusnya “sembarang” atau “sebarang” atau “setiap” atau “semua”. Kemudian walaupun dalam konteks matematika, penggunaan kata “persegi pada sisi miring“ yang berarti “persegi yang sisinya adalah sisi miring“ (juga “persegi pada sisi-sisi penyiku“) telah menjadi kebiasaan, tetapi dalam proses pembelajaran sebaiknya ditulis dalam bentuk pernyataan yang lebih jelas.

   Versi perbaikan dari pernyataan Teorema Pythagoras pada soal adalah:
   “Pada sebarang segitiga siku-siku maka luas persegi dengan sisinya adalah sisi miring sama dengan jumlah luas persegi yang sisinya adalah sisi siku-siku “.

2. Ambil $m = 11$ maka $2m = 22$, $m^2 - 1 = 120$, dan $m^2 + 1 = 122$.
   Diperoleh Tripel Pythagoras (22,120,122). Ini Tripel Pythagoras Non-Primitif sehingga dapat disederhanakan. Jika dibagi dua diperoleh Tripel Pythagoras (11,60,61).
3. Bukti dari Garfield lebih sederhana sehingga lebih efisien. Diagram Garfield merupakan “separoh” dari diagram dari Pythagoras. Walaupun pada diagram Pythagoras menggunakan rumus luas persegi dan segitiga (yang secara matematis, lebih fundamental), tetapi penggunaan rumus luas trapesium pada diagram Garfield bukan suatu rintangan karena telah dipelajari di SD.

4. Pernyataan Kebalikan Teorema Pythagoras dapat dinyatakan dengan menggunakan konsep Tripel Pythagoras, sebagai berikut:

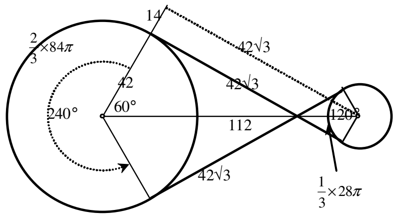
   > “Pada setiap segitiga, jika ketiga panjang sisinya memenuhi Tripel Pythagoras maka segitiga itu siku-siku”

5. Sudut refleks.

6. Arsir tebal 385 satuan luas, tipis 231 satuan luas.

7. 126 mm.

8. Panjang rantai yang tepat terpasang pada kedudukan tersebut = ($84\sqrt{3} + 65\frac{1}{3}\pi$) cm.



9. Panjang jari-jari lingkaran dalamnya 8 mm.

10. Tidak selalu kongruen dan tidak selalu sebangun, tergantung besar sudutnya.

11. Petunjuk: Tarik garis tinggi dari C. Terjadi dua segitiga kongruen (ss, sd, sd).

12. a. $AC = 12$ dan b. $KL = 5$

13. Namakan kaki pohon di seberang titik T, maka

$$\frac{TA}{TB} = \frac{AD}{BC} = \frac{9}{30}$$

$\Leftrightarrow 30TA = 9TB$

$\Leftrightarrow 10TA = 3(TA + 28)$

$\Leftrightarrow 7TA = 3 \times 28 \Leftrightarrow TA = 12$

Jadi lebar sungai 12 m.